



# Sobre la Aplicación de la Teoría de Torsores en Cinemática

A. Bilbao Sagarduy, O. Altuzarra Maestre, A. Hernández Frías, E. Amezua San Martín

Dpto. de Ingeniería Mecánica. Universidad del País Vasco UPV/EHU  
oscar.altuzarra@ehues

---

*El carácter vectorial de las magnitudes cinemáticas y dinámicas permite aplicar las herramientas matemáticas que proporciona el Cálculo Vectorial al estudio del movimiento de los sistemas mecánicos. Los vectores a manejar se pueden expresar con sus componentes y su punto de aplicación, o alternativamente con el momento que generan respecto a un punto determinado. En este último formalismo se asientan las bases de la denominada Teoría de Torsores.*

*Se sabe que el campo de velocidades de un sólido rígido puede asimilarse al campo de momentos generado por un sistema de vectores, cuyas coordenadas vectoriales son la velocidad angular y la velocidad lineal de un punto del sólido. El conjunto de ambas magnitudes define un torsor que proporciona información completa del movimiento del sólido.*

*Los autores pretenden en este trabajo mostrar una sistematización del análisis de velocidades y aceleraciones para cadenas cinemáticas abiertas que sea simple de implementar en mecánica computacional.*

---

## 1. INTRODUCCIÓN

La primera formulación de la Teoría de Torsores se encuentra en el “*Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi*”, escrito por Mozzi en 1763. En esta obra, Mozzi establece que el movimiento de un sólido se puede descomponer en otros dos; uno de ellos es una traslación rectilínea y el otro, una rotación alrededor de un eje paralelo al de traslación, al que denomina “*asse spontaneo di rotazione*” [1].

Será necesario que transcurra algo más de un siglo para que vea la luz el desarrollo completo de la Teoría de Torsores. Este nuevo tratamiento del estudio del movimiento se debe a Ball, que en 1876 publica “*The Theory of Screws: A study in the Dynamics of a rigid body*”.

Posteriormente, Ball revisa su obra mejorando los métodos geométricos utilizados y profundizando en el estudio de las cadenas cinemáticas [2]. En este nuevo tratado editado en 1900, se define el “*screw*” (torsor) como una línea recta a la que se asocia una magnitud lineal definida llamada “*pitch*” (paso) y se establece que el desplazamiento de un sólido rígido puede reducirse a un “*twist*” (movimiento helicoidal en torno al torsor).

En las últimas décadas, se ha incorporado a la Teoría de Torsores el aparato matemático del cálculo vectorial y matricial, lo que ha contribuido a impulsar su aplicación en el estudio de las cadenas cinemáticas [3,4]. Con estas herramientas matemáticas, el movimiento helicoidal infinitesimal, alrededor y a lo largo del eje instantáneo de rotación y deslizamiento del sólido, puede representarse mediante el vector  $\omega$  y el escalar  $h$  que define el paso. Es práctica habitual utilizar dos tipos de notaciones para expresar estas coordenadas: una simbólica, en textos descriptivos y otra matricial, en cálculos matemáticos.

Para la representación simbólica suele utilizarse el símbolo \$ y la siguiente notación:

$$\text{\$} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z; h\omega_x, h\omega_y, h\omega_z) = \omega(u_x, u_y, u_z; hu_x, hu_y, hu_z) = \omega \hat{\text{\$}} \quad (1)$$

donde  $u_x, u_y, u_z$  son las componentes cartesianas del vector unitario  $\mathbf{u}$  que define el eje instantáneo de rotación y deslizamiento.

En la formulación matricial el torsor se representa también por el símbolo  $\$$  y se trata matemáticamente como un vector de seis dimensiones:

$$\$ = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ h\mathbf{u} \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ h\mathbf{u} \end{bmatrix} = \omega \hat{\$} \quad (2)$$

Repárese que  $\hat{\$}$  representa un *torsor normalizado* que se corresponde con la definición de “screw” dada por Ball, mientras que  $\$$  simboliza el movimiento helicoidal denominado “twist”.

## 2. TORSOR DE VELOCIDADES DE UN SÓLIDO

Es bien conocido que el campo de velocidades de un sólido queda definido si se conocen la velocidad angular y la de uno cualquiera de sus puntos. Así, la relación entre las velocidades de dos puntos cualesquiera  $O$  y  $P$  viene dada por la expresión vectorial:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP} \quad (3)$$

La estructura matemática de esta igualdad permite asimilar el campo de velocidades del sólido rígido a un sistema de vectores deslizantes de resultante  $\boldsymbol{\omega}$  y momentos  $\mathbf{v}_O$  y  $\mathbf{v}_P$  respecto a los puntos  $O$  y  $P$ , respectivamente.

El conjunto de coordenadas vectoriales  $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_O)$ , o bien  $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_P)$ , constituyen la magnitud conocida en Calculo Vectorial como *torsor* del sistema de vectores. Atendiendo a su significado físico, se aplicará en lo sucesivo la denominación de *torsor de velocidades* para designar a este conjunto de coordenadas.

Utilizando notación matricial, la expresión (3) del campo de velocidades adopta la forma:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + {}^P_0\mathbf{X}\boldsymbol{\omega} \quad (4)$$

siendo  ${}^P_0\mathbf{X}$  la matriz antisimétrica formada con las componentes del vector  $\mathbf{OP}$ :

$${}^P_0\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & z_P - z_O & -(y_P - y_O) \\ -(z_P - z_O) & 0 & x_P - x_O \\ y_P - y_O & -(x_P - x_O) & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Finalmente, tras un sencillo artificio matemático, se llega a la siguiente relación matricial de los torsesores de velocidades:

$$\$_P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ {}^P_0\mathbf{X} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ {}^P_0\mathbf{X} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \$_O = {}^P_0\mathbf{U}\$_O \quad (6)$$

donde  $\mathbf{I}_3$  es una matriz unidad 3×3,  $\mathbf{0}_3$  una matriz 3×3 de elementos nulos y  ${}^P_0\mathbf{U}$  la matriz 6×6 de transformación de los torsesores.

Recuérdese que, si se reduce el movimiento a un punto  $I$  del eje instantáneo de rotación y deslizamiento, la igualdad vectorial (3) deviene en:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_d + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{IP} = h\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{IP} \quad (7)$$

donde  $\mathbf{v}_d$  es la denominada *velocidad de deslizamiento* y  $h$  el *paso del torsor*, es decir, la relación entre las velocidades de deslizamiento y angular.

Siguiendo el procedimiento utilizado para deducir la expresión (6), se llega a la siguiente relación matricial:

$$\$_p = {}^p U \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ h\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = {}^p U \$_i = \omega {}^p U \hat{\$_i} \quad (8)$$

Como ya se ha indicado, el torsor de velocidades encierra una interpretación física del movimiento que constituye la base de la aplicación de la Teoría de Torsores en Cinemática: *el movimiento permanente de un sólido es la sucesión de movimientos helicoidales infinitesimales, alrededor y a lo largo de su eje instantáneo de rotación y deslizamiento.*

### 3. TORSOR DE ACELERACIONES DE UN SÓLIDO

Se sabe que la relación entre las aceleraciones  $\mathbf{a}_p$  y  $\mathbf{a}_o$  de dos puntos de un sólido, con velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  y aceleración angular  $\boldsymbol{\alpha}$ , viene dada por la igualdad:

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_o) \quad (9)$$

Un primer análisis de esta expresión vectorial evidencia que incluye el término adicional  $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_o)$ , que no tiene su equivalente en el campo de momentos. Este inconveniente puede salvarse fácilmente con un sencillo artificio matemático que transforma la expresión anterior en la siguiente:

$$\mathbf{a}_p - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_p = \mathbf{a}_o - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{OP} \quad (10)$$

Así, llamando *aceleración reducida*  $\mathbf{a}^{(R)}$  al vector resultante de la diferencia  $\mathbf{a} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ , se puede escribir:

$$\mathbf{a}_p^{(R)} = \mathbf{a}_o^{(R)} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{OP} \quad (11)$$

Este fue el modo seguido por Brand [5] para expresar el estado de aceleración de un sólido. Se puede definir, de esta manera, un *torsor de aceleraciones*  $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}^{(R)})$  de la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{a}^{(R)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{a} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Siguiendo el procedimiento aplicado en el campo velocidades, se obtiene la siguiente expresión matricial para el campo de aceleraciones:

$$\mathbf{a}_p^{(R)} = \mathbf{a}_o^{(R)} + {}^p_o \mathbf{X} \boldsymbol{\alpha} \quad (13)$$

De igual modo, se llega a la igualdad que relaciona los torsores  $\mathbf{A}_p$  y  $\mathbf{A}_o$ :

$$\mathbf{A}_p = {}^p_o \mathbf{U} \mathbf{A}_o \quad (14)$$

Si bien es cierto que al campo de aceleraciones, así definido, puede aplicarse el aparato matemático de la Teoría de Torsores, no es menos cierto que carece del sentido físico que subyace en el torsor de velocidades.

Conviene tener presente que los ejes centrales de los torsores  $\$_$  y  $\mathbf{A}$  solamente coinciden cuando el vector rotación mantiene su dirección a lo largo del movimiento y que, además, los pasos de ambos torsores pueden ser diferentes.

### 4. RELACIÓN ENTRE LOS TORSORES DE VELOCIDADES Y ACELERACIONES

Considérese el caso general en el que los torsores  $\$_$  y  $\mathbf{A}$  tienen distintos ejes centrales y pasos. Si ambos se reducen al mismo punto  $P(x, y, z)$ , se verifica:

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{a}_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_p \end{bmatrix} = \$_p - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_p \end{bmatrix} \quad (15)$$

Repárese que, por razones de simplicidad, se ha supuesto que todos los vectores están expresados en la misma base. Si, además, ésta pertenece al sistema fijo  $(O_0, x_0, y_0, z_0)$ , de las expresiones (5) y (6) se deduce la siguiente relación entre ambos torsores:

$$\mathbf{A}_P = \dot{\$}_P + {}^0_P\dot{U}\$_P \quad (16)$$

Tiene especial interés el caso particular en el que el torsor de velocidades es un sistema de primer orden, es decir, cuando el sólido está accionado por un par cinemático de un grado de libertad. En este supuesto, como la rotación mantiene su dirección a lo largo del tiempo y el paso permanece constante, los ejes centrales y los pasos de ambos torsores coinciden. Por tanto, se puede escribir:

$$\mathbf{A} = \alpha \hat{\$} \quad (17)$$

Aplicando esta relación a los pares de un grado de libertad y haciendo coincidir el eje  $OZ$  con la recta soporte de los torsores, se obtiene:

a) *Par helicoidal*, representado con los símbolos  $\$(H)$  y  $A(H)$ :

$$\$(H) = \omega(0,0,1; 0,0, h) \quad ; \quad A(H) = \alpha(0,0,1; 0,0, h) \quad (18)$$

Recuérdese que el paso  $h$  es una característica del par y que, por tanto, sólo tiene un grado de libertad representado por la amplitud  $\omega$ .

b) *Par de rotación*, designado por  $\$(R)$  y  $A(R)$ :

$$\$(R) = \omega(0,0,1; 0,0,0) \quad ; \quad A(R) = \alpha(0,0,1; 0,0,0) \quad (19)$$

c) *Par prismático*, con los símbolos  $\$(P)$  y  $A(P)$ :

$$\$(P) = v(0,0,0; 0,0,1) \quad ; \quad A(P) = a(0,0,0; 0,0,1) \quad (20)$$

## 5. CADENAS CINEMÁTICAS

Considérese una cadena cinemática constituida por un conjunto de  $n + 1$  barras enlazadas entre sí por  $n$  pares cinemáticos, cuya posición se fija mediante la notación de Denavit-Hartenberg [6].

De este modo, cada uno de los sistemas de coordenadas  $(O_i, x_i, y_i, z_i)$  queda identificado mediante cuatro parámetros:  $a_i, \alpha_i, \theta_i, d_i$ , siendo la matriz de transformación  ${}^{i-1}_i\mathbf{T}$  el producto de cuatro transformaciones básicas:

$${}^{i-1}_i\mathbf{T} = \mathbf{D}_{z_{i-1}, d_i} \mathbf{R}_{z_{i-1}, \theta_i} \mathbf{D}_{x_{i-1}, a_i} \mathbf{R}_{x_{i-1}, \alpha_i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

### 5.1. Torsores de velocidades

Los torsores de cada uno de los pares definen las velocidades relativas entre las barras unidas por esos pares. Por tanto, el movimiento absoluto del elemento terminal se obtiene, en virtud de las leyes de la Cinemática, sumando los torsores correspondientes a cada uno de los pares cinemáticos, previamente reducidos en el mismo punto y expresados en el mismo sistema de referencia.

Para designar el movimiento del elemento terminal  $n$ , reducido en el punto  $O_0$  y expresado en el sistema fijo  $(O_0, x_0, y_0, z_0)$ , se utilizará el símbolo  ${}^0\$(n)$ . El torsor correspondiente al par cinemático aplicado a la barra  $i$  se representará por el símbolo  ${}^j\$_i$ , si está reducido en el

punto  $O_j$  y expresado en  $(O_j, x_j, y_j, z_j)$ , y por  ${}^k\$_i$  si el punto de reducción es  $O_k$  y está expresado en  $(O_j, x_j, y_j, z_j)$ .

El movimiento absoluto de la barra terminal se obtiene mediante la suma:

$${}^0\$_{(n)} = \sum_{i=1}^n {}^0\$_i = \sum_{i=1}^n {}_{i-1}^0\mathbf{S} {}^{i-1}\$_i \quad (22)$$

donde  ${}^{i-1}\$_i$  simboliza el par cinemático aplicado a la barra  $i$ , según la notación de Denavit-Hartenberg, y  ${}_{i-1}^0\mathbf{S}$  la correspondiente matriz de cambio de sistema de referencia:

$${}_{i-1}^0\mathbf{S} = \prod_{k=1}^{i-1} {}^{k-1}\mathbf{S} \quad (23)$$

Aplicando la igualdad (6) al par  $k+1$ , expresado en el sistema  $(O_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1})$ , resulta:

$${}^{k-1}\$_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ {}^{k-1}\mathbf{X} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} {}^{k-1}\$_{k+1} \quad (24)$$

Además, se sabe que los torsores  ${}^{k-1}\$_i$  y  ${}^k\$_i$  están relacionados con la matriz de rotación  ${}^{k-1}\mathbf{R}$  por la siguiente igualdad:

$${}^{k-1}\$_{k+1} = \begin{bmatrix} {}^{k-1}\mathbf{R} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & {}^{k-1}\mathbf{R} \end{bmatrix} {}^k\$_{k+1} \quad (25)$$

Se obtiene, por tanto, para la matriz de cambio de sistema de referencia  ${}_{i-1}^{k-1}\mathbf{S}$ :

$${}_{i-1}^{k-1}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ {}^{k-1}\mathbf{X} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{k-1}\mathbf{R} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & {}^{k-1}\mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{k-1}\mathbf{R} & \mathbf{0}_3 \\ {}^{k-1}\mathbf{X} {}^{k-1}\mathbf{R} & {}^{k-1}\mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Teniendo en cuenta la expresión (5), la matriz  ${}^{k-1}\mathbf{X}$  adopta la forma:

$${}^{k-1}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & -d_k & a_k \sin \theta_k \\ d_k & 0 & -a_k \cos \theta_k \\ -a_k \sin \theta_k & a_k \cos \theta_k & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

y, como  ${}^{k-1}\mathbf{R} = \mathbf{R}_{z_{k-1}, \theta_k} \mathbf{R}_{x_{k-1}, \alpha_k}$ , resulta:

$${}^{k-1}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \cos \alpha_k & \sin \theta_k \sin \alpha_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \cos \alpha_k & -\cos \theta_k \sin \alpha_k \\ 0 & \sin \alpha_k & \cos \alpha_k \end{bmatrix} \quad (28)$$

Finalmente, el movimiento absoluto  ${}^n\$_{(n)}$  de la barra terminal, reducido en el punto  $O_n$ , se obtiene mediante la expresión (6) del campo de velocidades:

$${}^n\$_{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ {}^n\mathbf{X} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} {}^0\$_n = {}^n\mathbf{U} {}^0\$_{(n)} \quad (29)$$

donde la matriz  ${}^n\mathbf{X}$  está formada por las coordenadas del vector  ${}^0\mathbf{r}_n$ , que fija la posición del punto  $O_n$  respecto al sistema fijo.

## 5.2. Aplicación a un robot R-R-R

Considérese el brazo articulado de la figura 1, en la que se han situado los sistemas de coordenadas siguiendo el criterio de Denavit-Hartenberg.

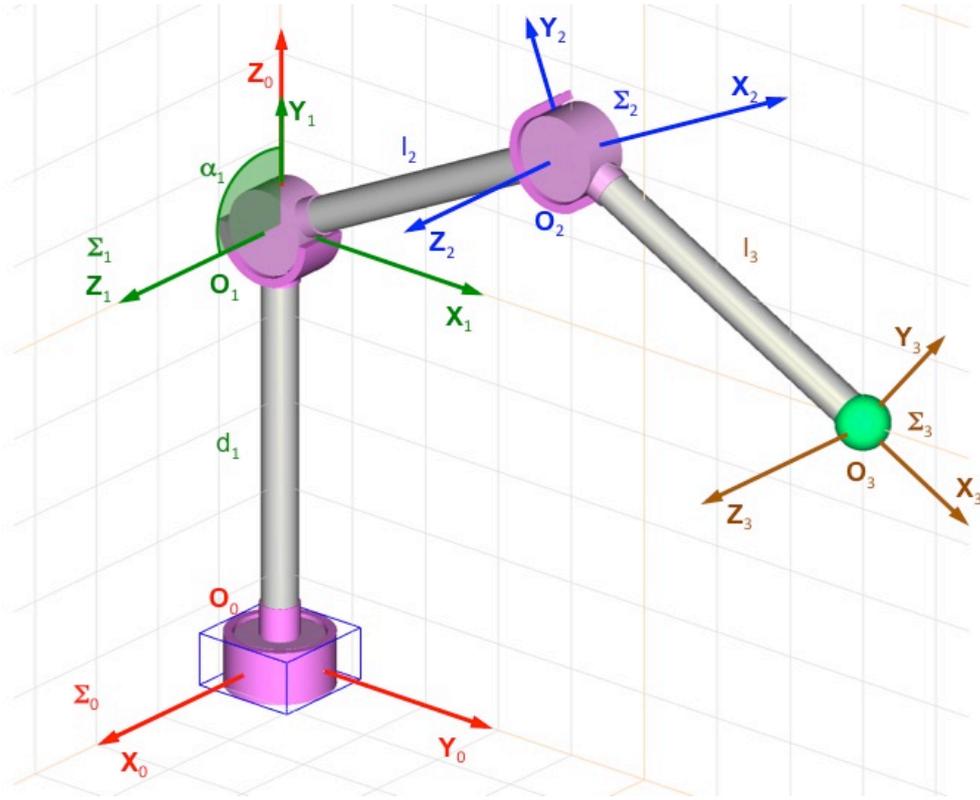


Figura 1. Robot R-R||R

En la tabla 1 se muestran los valores de los parámetros que definen la posición de cada uno de los tres sistemas.

Sistema	$a_i$	$\alpha_i$ (rad)	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$-\pi/2$	$d_1$	$\theta_1$
2	$l_2$	0	0	$\theta_2$
3	$l_3$	0	0	$\theta_3$

Tabla 1. Parámetros de Denavit-Hartenberg

Utilizando la notación de Denavit-Hartenberg, los torses de los pares cinemáticos tienen la forma:

$${}^0\hat{\$}_1 = {}^1\hat{\$}_2 = {}^2\hat{\$}_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (30)$$

El tesor de velocidades del elemento terminal se obtiene aplicando el sumatorio (22):

$${}^0\hat{\$}^{(3)} = \dot{\theta}_1 {}^0\hat{\$}_1 + \dot{\theta}_2 {}^0\mathbf{S}^1\hat{\$}_2 + \dot{\theta}_3 {}^0\mathbf{S}^2\hat{\$}_3 \quad (31)$$

Trasladando los valores de los parámetros de la tabla 1 a las expresiones (26), (27) y (28), se obtiene:

$${}^0\hat{\$}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -s\theta_1 & -s\theta_1 \\ 0 & c\theta_1 & c\theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -d_1c\theta_1 & -d_1c\theta_1 + l_2c\theta_1s\theta_2 \\ 0 & -d_1s\theta_1 & -d_1s\theta_1 + l_2s\theta_1s\theta_2 \\ 0 & 0 & l_2c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Para el movimiento absoluto  ${}^3\dot{\$}^{(3)}$  de la barra terminal, resulta:

$${}^3\dot{\$}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -s\theta_1 & -s\theta_1 \\ 0 & c\theta_1 & c\theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -{}^0y_3 & {}^0z_3c\theta_1 - d_1c\theta_1 & {}^0z_3c\theta_1 - d_1c\theta_1 + l_2c\theta_1s\theta_2 \\ {}^0x_3 & {}^0z_3s\theta_1 - d_1s\theta_1 & {}^0z_3s\theta_1 - d_1s\theta_1 + l_2s\theta_1s\theta_2 \\ 0 & -{}^0y_3s\theta_1 - {}^0x_3c\theta_1 & -{}^0y_3s\theta_1 - {}^0x_3c\theta_1 + l_2c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

### 5.3. Torsores de aceleraciones

El torsor de aceleraciones  ${}^0\mathbf{A}^{(n)}$  se puede obtener fácilmente mediante la aplicación de la relación (16):

$${}^0\mathbf{A}^{(n)} = {}^0\dot{\$}^{(n)} + {}^0\mathbf{U} \cdot {}^0\dot{\$}^{(n)} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\omega}_x^{(n)} \\ {}^0\dot{\omega}_y^{(n)} \\ {}^0\dot{\omega}_z^{(n)} \\ {}^0\dot{v}_x^{(n)} \\ {}^0\dot{v}_y^{(n)} \\ {}^0\dot{v}_z^{(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \vdots & \mathbf{0}_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & {}^0v_z^{(n)} & -{}^0v_y^{(n)} \\ -{}^0v_z^{(n)} & 0 & {}^0v_x^{(n)} \\ {}^0v_y^{(n)} & -{}^0v_x^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0\omega_x^{(n)} \\ {}^0\omega_y^{(n)} \\ {}^0\omega_z^{(n)} \\ {}^0v_x^{(n)} \\ {}^0v_y^{(n)} \\ {}^0v_z^{(n)} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Repárese que el cálculo de  ${}^0\dot{\$}^{(n)}$  no presenta dificultad alguna, porque las componentes de  ${}^0\boldsymbol{\omega}^{(n)}$  y  ${}^0\mathbf{v}^{(n)}$  están expresadas en el sistema fijo. Recuérdese, asimismo, que  ${}^0\boldsymbol{\omega}^{(n)}$  es la rotación absoluta del elemento terminal y  ${}^0\mathbf{v}^{(n)}$  la velocidad absoluta que tendría el punto  $O_n$  si perteneciera a dicho elemento.

Si se aplica este procedimiento a la determinación de  ${}^n\mathbf{A}^{(n)}$ , la expresión anterior deviene en:

$${}^n\mathbf{A}^{(n)} = {}^n\dot{\$}^{(n)} + {}^n\mathbf{U} \cdot {}^n\dot{\$}^{(n)} = {}^n\dot{\$}^{(n)} \quad (35)$$

La aparente simplicidad de esta relación oculta la necesidad del cálculo previo de las coordenadas del vector  ${}^0\mathbf{r}_n$ , relacionadas con las del vector  ${}^n\mathbf{r}_n$  mediante la matriz de transformación  ${}^0\mathbf{T}$ :

$$[{}^0x_n \ {}^0y_n \ {}^0z_n \ 1]^T = {}^0\mathbf{T} [{}^nx_n \ {}^ny_n \ {}^nz_n \ 1]^T \quad (36)$$

Por otra parte, las leyes de la Cinemática permiten deducir  ${}^0\mathbf{A}^{(n)}$  utilizando exclusivamente el cálculo matricial. En efecto, se sabe que la aceleración angular  ${}^0\boldsymbol{\alpha}^{(n)}$  del movimiento absoluto del elemento terminal  $n$  se puede expresar como sigue:

$${}^0\boldsymbol{\alpha}^{(n)} = \sum_{i=1}^n ({}^0\boldsymbol{\alpha}_i + {}^0\boldsymbol{\omega}^{(i-1)} \times {}^0\boldsymbol{\omega}_i) \quad (37)$$

donde  ${}^0\boldsymbol{\omega}^{(i-1)} \times {}^0\boldsymbol{\omega}_i$  se conoce como aceleración angular complementaria de Resal.

Análogamente, la aceleración lineal  ${}^0\mathbf{a}^{(n)}$  del punto  $O_n$  tiene la forma:

$${}^0\mathbf{a}^{(n)} = \sum_{i=1}^n ({}^0\mathbf{a}_i + 2 {}^0\boldsymbol{\omega}^{(i-1)} \times {}^0\mathbf{v}_i) \quad (38)$$

siendo el término  $2 {}^0\boldsymbol{\omega}^{(i-1)} \times {}^0\mathbf{v}_i$  la aceleración complementaria o de Coriolis.

Para definir el torsor de aceleraciones es necesario sustituir, en la expresión anterior, las aceleraciones  $\mathbf{a}$  por sus *reducidas*  $\mathbf{a}^{(R)}$ . De este modo, tras sencillas operaciones, se obtiene:

$${}^0\mathbf{a}^{(n)} - {}^0\boldsymbol{\omega}^{(n)} \times {}^0\mathbf{v}^{(n)} = \sum_{i=1}^n ({}^0\mathbf{a}_i - {}^0\boldsymbol{\omega}_i \times {}^0\mathbf{v}_i + {}^0\boldsymbol{\omega}^{(i-1)} \times {}^0\mathbf{v}_i + {}^0\mathbf{v}^{(i-1)} \times {}^0\boldsymbol{\omega}_i) \quad (39)$$

En consecuencia, designando con el símbolo  ${}^0\mathbf{A}_C^{(n)}$  al término complementario:

$${}^0\mathbf{A}_C^{(n)} = \sum_{i=1}^n \left[ \begin{array}{c} {}^0\boldsymbol{\omega}^{(i-1)} \times {}^0\boldsymbol{\omega}_i \\ {}^0\boldsymbol{\omega}^{(i-1)} \times {}^0\mathbf{v}_i + {}^0\mathbf{v}^{(i-1)} \times {}^0\boldsymbol{\omega}_i \end{array} \right] \quad (40)$$

el torsor de aceleraciones  ${}^0\mathbf{A}^{(n)}$  adopta la siguiente formulación:

$${}^0\mathbf{A}^{(n)} = \sum_{i=1}^n {}^0\mathbf{A}_i + {}^0\mathbf{A}_C^{(n)} \quad (41)$$

Repárese que, con objeto de obtener expresiones matemáticas sencillas, se ha supuesto que todas las magnitudes están expresadas en el sistema absoluto.

## 6. CONCLUSIONES

La expresión del problema de velocidades mediante torsesores permite una sistematización de la construcción del Jacobiano que es aún más notable si además se hace uso de la notación de Denavit-Hartenberg. Esto hace que sea muy útil cuando se pretende generar un análisis computacional en mecanismos de cadena abierta.

Aunque las aceleraciones no cumplen las propiedades de campo de vectores, y en consecuencia su torsor de aceleraciones no tiene un sentido físico tan claro como en el análisis de velocidades, en este trabajo se ha mostrado que es posible hacer un tratamiento integrado de velocidades y aceleraciones mediante torsesores. Debe tenerse muy en cuenta que, contrariamente a lo que ocurre con la combinación lineal de torsesores de velocidad, en el caso de combinar torsesores de aceleración el resultado no es un torsor puesto que aparece un término complementario.

## 7. REFERENCIAS

- [1] M. Ceccarelli, *Preliminary studies to Screw Theory in XVIIIth century*, Proc. of A Symposium Commemorating the Legacy, Works and Life of Sir Robert Stawell Ball, University of Cambridge, Trinity College, (2000).
- [2] R. S. Ball, *A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge University Press, (1900).
- [3] K.H. Hunt, *Kinematics Geometry of Mechanisms*, Oxford University Press, (1978).
- [4] J. K. Davidson and K. H. Hunt, *Robots and Screw Theory: Applications of Kinematics and Statics to Robotics*, Oxford University Press, (2004).
- [5] L. Brand, *Vector and Tensor Analysis*, Wiley, (1947).
- [6] R. N. Jazar, *Theory of Applied Robotics. Kinematics, Dynamics, and Control*, Springer, (2010).