

# Influencia del Rozamiento en la Aplicación del Teorema del Límite Superior en Procesos de Indentación.

Bermudo Gamboa, C.<sup>(1)</sup>, Martín Fernández, F.<sup>(1)</sup>, Sevilla Hurtado, L.<sup>(1)</sup>

(1) Dpto. de Ingeniería Civil, de Materiales y fabricación. ETSII-EPS, Universidad de Málaga  
bgamboa@uma.es

---

En el presente trabajo se aplica el Teorema del Límite superior (TLS) a procesos de indentación, implementando el modelo de Bloques Rígidos Triangulares (BRT), con distribución Modular [1]. Se elaboran los diferentes hodógrafos correspondientes a un campo de velocidades cinemáticamente admisible, estudiándose la influencia de la incorporación del rozamiento en su doble vertiente: rozamiento por adherencia ( $m$ ) y por deslizamiento ( $\mu$ ). Al aplicar el TLS mediante BRT para cada disposición Modular, considerando en cada caso la distribución adecuada y diferenciando entre ambos tipos de rozamiento, se obtienen resultados en concordancia con los obtenidos en otros procesos de conformado plástico, tanto estacionarios [6] como no estacionarios. Por último, se muestra la ventaja del menor coste computacional que ofrece este método de cálculo, así como el hecho de tener identificado en todo momento la evolución física del problema planteado.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

En general en la industria, y especialmente en los casos de deformación plástica, no siempre es necesario conocer el valor exacto de la energía mínima necesaria para obtener dicho proceso de deformación. En el presente trabajo se desarrolla la Técnica del Límite Superior (TLS), que ofrece un valor de energía que garantiza la deformación de la pieza a deformar. La técnica es especialmente interesante en este aspecto ya que, a pesar de no ofrecer el valor exacto de energía necesaria, si se obtiene el valor mínimo a partir del cual se garantiza que la pieza comenzará su deformación plástica. El método es especialmente aplicable debido a su simplicidad, en comparación con otros métodos, en casos de deformación plana.

El estudio de esta energía de deformación ha sido abordado, tradicionalmente, mediante aproximaciones matemáticas diversas, tanto mediante métodos numéricos, como métodos analíticos, pero la gran complejidad de las teorías de la plasticidad [7] ha condicionado el desarrollo de estos últimos métodos. Es el TLS mediante su aplicación geométrica y cinemática el que hace posible una implementación analítica de complejidad limitada, con la que se obtienen diferentes parámetros relacionados con el estado de deformación plástica estudiado. El resultado obtenido mediante la aplicación de este método es, por lo tanto, aproximado, pero proporciona una resolución más simple y un notable enfoque cualitativo a la resolución del problema.

Para el desarrollo de la técnica, se utilizan Bloques Rígidos Triangulares (BRT). Este modelo considera que los esfuerzos o tensiones que causan la deformación en el material, se producen únicamente en los planos que delimitan cada BRT, puesto que es a lo largo de estos planos donde existe discontinuidad en la velocidad. El resto de los puntos que lo conforman se mueven a la misma velocidad y en la misma dirección. Desde un punto de vista teórico y bajo condiciones generales, el TLS considera que: *El trabajo realizado por las fuerzas superficiales reales de tracción (o compresión) en un cuerpo rígido-plástico perfecto es menor o igual que el realizado por las fuerzas superficiales de tracción (o compresión) correspondientes a un campo de velocidades cinemáticamente admisible.*

Por lo tanto, la ecuación general se expresa de la siguiente forma:

$$\int_{S_v} T_i v_i dS_v \leq \int_{S_D} k[v^*] dS_D^* \quad (1)$$

Siendo:

$T_i$ : Fuerzas externas aplicadas sobre la pieza a deformar

$v_i$ : Campo real de velocidades

$S_v$ : Superficies de aplicación de las cargas exteriores

$k$ : Límite de fluencia por tensión cortante del material

$v^*$ : Campo de velocidades virtual cinemáticamente admisible

$S^*_D$ : Superficies de discontinuidad, aplicación del campo virtual de velocidades.

En condiciones de deformación plana, el material ofrecerá su máxima resistencia a la deformación cuando  $\tau=k$ . Por lo tanto, el valor de la energía disipada a causa de la energía interna no podrá exceder del valor dado por  $k \cdot s \cdot v^*$ , siendo  $s$  la longitud de las discontinuidades tangenciales a la velocidad.

Debido a la doble simetría impuesta (horizontal y vertical), el estudio se reduce en un cuarto de la pieza (Figura 1)

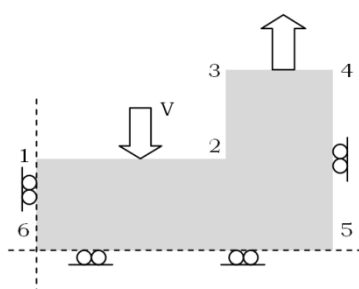


Figura 1: Condiciones de contorno caso de indentación

## 2. METODOLOGÍA

En el presente trabajo se aplica esta técnica a procesos de indentación. En el caso que nos ocupa, el proceso será asimilable a uno de deformación plana, bajo ciertas condiciones geométricas, lo que posibilita el tratamiento analítico mediante la TLS. Implementando el modelo de BRT, existen distintos planteamientos en cuanto al establecimiento de la configuración geométrica a adoptar, así como a su tratamiento matemático, siendo la distribución Modular [1] la que se aborda en este análisis. No obstante, en el apartado de resultados, se ofrecerá una comparativa del modelo Modular frente al modelo No Modular bajo las mismas condiciones de contorno y forma.

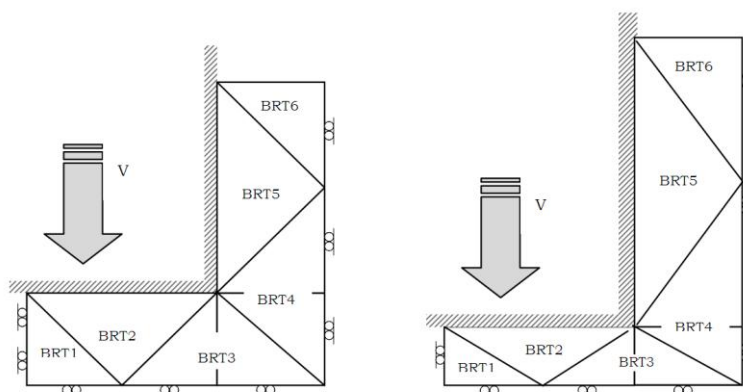


Figura 2: Disposición Modular en dos instantes distintos

El modelo Modular (Figura 2) consiste en la introducción de módulos compuestos por no más de tres BRT, cuya conexión se realiza por la relación entre la velocidad de salida y entrada del material de cada módulo, ya que estas deben ser iguales en magnitud. Para

simplificar dicha relación en la formulación, se otorgar el mismo número a los triángulos contiguos de distintos módulos, diferenciándolos con la incorporación de la letra del módulo al que pertenece mediante subíndices, como se muestra posteriormente en los cálculos.

Analizando cada módulo independientemente y teniendo en cuenta las relaciones mencionadas, se elaboran los diferentes hodógrafos correspondientes a un campo de velocidades cinemáticamente admisible, estudiándose la influencia de la incorporación del rozamiento en su doble vertiente: rozamiento por adherencia ( $m$ ) y por deslizamiento ( $\mu$ ).

Es necesario considerar que el tercer módulo (módulo C), compuesto por los bloques rígidos triangulares número 4, 5 y 6, no asume ninguna deformación plástica como tal. Sufre el efecto de rozamiento en la zona en contacto con el punzón, y una distorsión vertical influenciada por el módulo precedente. Es por ello que se incorpora al análisis como objeto factible de estudio.

En primer lugar se cuenta con el Módulo A (Figura 3), que corresponde al material situado en la parte horizontal del punzón, y que puede dividirse de la siguiente forma:

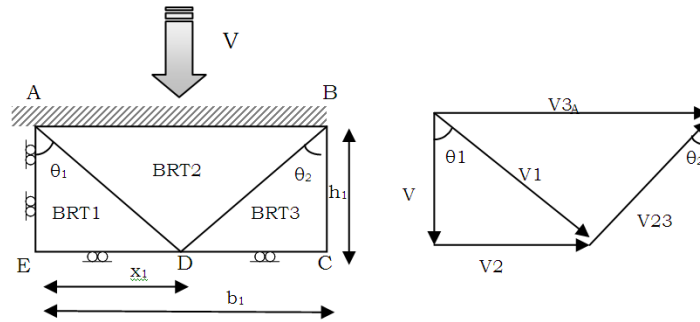


Figura 3: Configuración y Hodógrafo Módulo A

De este primer módulo, se resuelven las siguientes ecuaciones, donde  $m$  y  $\mu$  son los diferentes rozamientos:

Adherencia: 
$$P \cdot b_1 \cdot V \cdot w = k \cdot w \cdot [V_1 \cdot ED + V_{12} \cdot AD + V_2 \cdot AB \cdot m + V_{23} \cdot DB + V_{3A} \cdot DC] \quad (2)$$

Deslizamiento: 
$$P \cdot b_1 \cdot V \cdot w = w \cdot [k \cdot [V_1 \cdot ED + V_{12} \cdot AD + V_{23} \cdot DB + V_{3A} \cdot DC] + \mu P \cdot V_2 \cdot AB] \quad (3)$$

De las que se obtienen las relaciones adimensionales  $P/2k$ :

Adherencia: 
$$\left(\frac{P}{2k}\right)_A = \frac{1}{2b_1} \left[ \frac{2h_1 + b_1^2/2}{h_1} + \frac{b_1^2 m}{2h_1} \right] \quad (4)$$

Deslizamiento: 
$$\left(\frac{P}{2k}\right)_A = \frac{\left(\frac{2h_1^2 + b_1^2/2}{h_1}\right)}{2\left(b_1 - \mu \frac{b_1^2}{2h_1}\right)} \quad (5)$$

Para el caso particular de la indentación se ha creado un módulo especial con sólo dos BRT (Figura 4), a diferencia del caso de la forja [10]. Esto se debe a que resulta más idóneo adaptar el codo relativo al material que cambia de sentido para ascender por la vertical (BRT3<sub>B</sub> y 4<sub>B</sub>, Figura 2) a este tipo de módulo, para conseguir una continuidad apropiada en todos los módulos y no crear bloques con diferentes condiciones de contorno, en la que parte de los BRT que lo componen reciben fuerzas o desplazamientos.

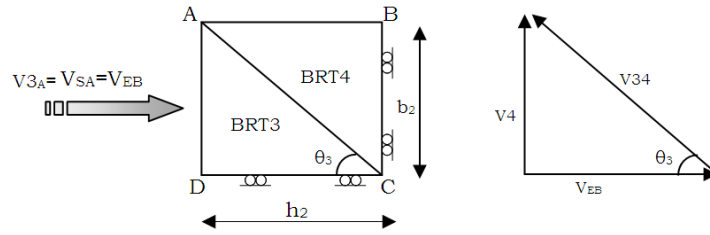


Figura 4: Módulo Ad-hoc (B) y Hodógrafo

De igual forma que en el anterior módulo, se plantea la siguiente ecuación:

Adherencia y  $P \cdot b_2 \cdot V \cdot w = k \cdot w \cdot [V_{3B} \cdot EC + V_{4B} \cdot CD + V_{34} \cdot AC]$   
 Deslizamiento: (6)

Y resolvemos buscando la relación  $P/2k$ :

Adherencia y  $\left(\frac{P}{2k}\right)_B = \frac{1}{2b_2} \left[ \frac{b_1 b_2}{h_1} + \frac{b_1 (h_1^2 + h_2^2)}{h_1 h_2} \right]$   
 Deslizamiento: (7)

Se ha de indicar que las ecuaciones para ambos tipos de rozamiento coinciden en este módulo porque ninguno de sus BRT se encuentra en contacto con el punzón.

Por último, en el módulo C (Figura 5), que se corresponde con el material en la zona vertical del punzón, se llega a las siguientes expresiones:

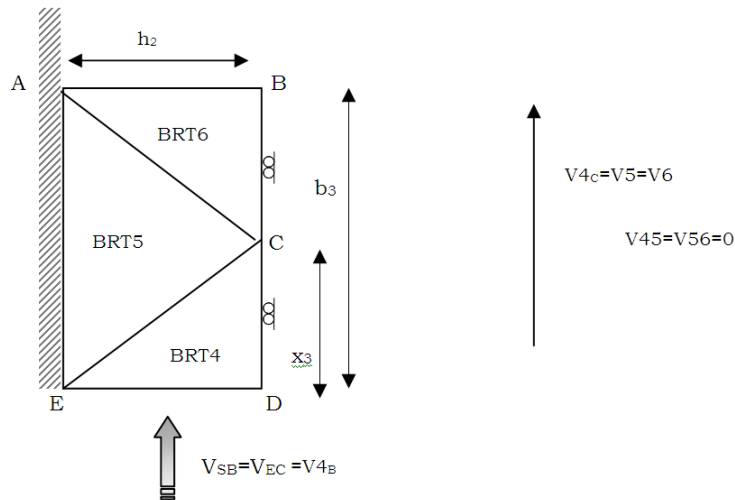


Figura 5: Configuración y hodógrafo Módulo C

Se plantean las siguientes ecuaciones:

Adherencia:  $P \cdot b_3 \cdot V \cdot w = k \cdot w \cdot [V_{4c} \cdot ED + V_5 \cdot AB \cdot m + V_6 \cdot DC]$  (8)

Deslizamiento:  $P \cdot b_3 \cdot V \cdot w = w \cdot [k \cdot [V_{4c} \cdot ED + V_6 \cdot DC] + \mu P \cdot V_5 \cdot AB]$  (9)

Y se vuelve a resolver para obtener

Adherencia:  $\left(\frac{P}{2k}\right)_c = \frac{1}{2b_1} \left[ \frac{b_1(1+m)}{2h_2} \right]$  (10)

Deslizamiento: 
$$\left(\frac{P}{2k}\right)_c = \frac{\left(\frac{b_1 b_3}{h_2}\right)}{2\left(b_3 - \mu \frac{b_1 b_3}{h_2}\right)} \quad (11)$$

Como se aprecia en la Figura 5, el hodógrafo solo se compone de una velocidad vertical, ya que este módulo no recibe ningún empuje lateral, toda la velocidad la recibe del módulo que le precede, por lo que sus velocidades relativas serán cero. Como se comentó anteriormente, este módulo no deforma plásticamente.

Para obtener el valor  $P/2k$  total que se pretende conseguir, se realiza una media ponderada de todos los términos como se aprecia en la ecuación 12:

$$\frac{P}{2k} = \frac{\left(\frac{P}{2k}\right)_A b_1 + \left(\frac{P}{2k}\right)_B b_2 + \left(\frac{P}{2k}\right)_C b_3}{(b_1 + b_2 + b_3)} \quad (12)$$

No obstante, en una segunda fase y una vez obtenidos los resultados del planteamiento inicial (Figura 6 y Figura 7), comparados los resultados con el modelo no modular (Figura 8), se observó la influencia negativa de este tercer modulo vertical, al que ya se ha referenciado en párrafos superiores.

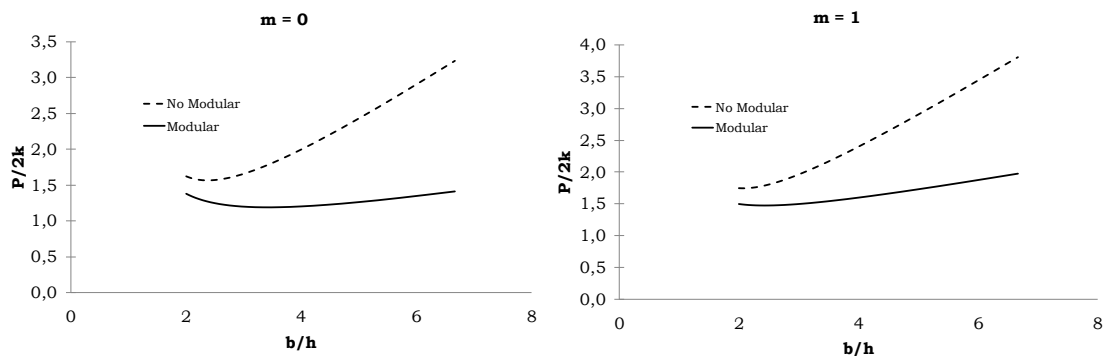


Figura 6: Comparativa de Modelos ( $m=0$  y  $m=1$ )

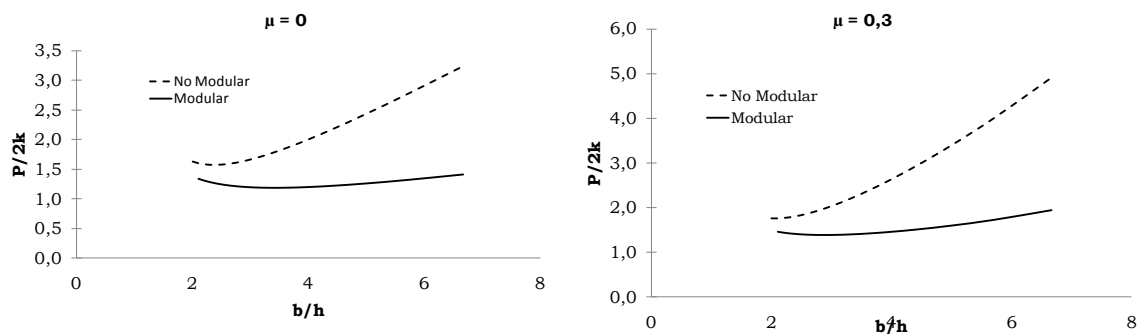


Figura 7: Comparativa de Modelos ( $\mu=0$  y  $\mu=0,3$ )

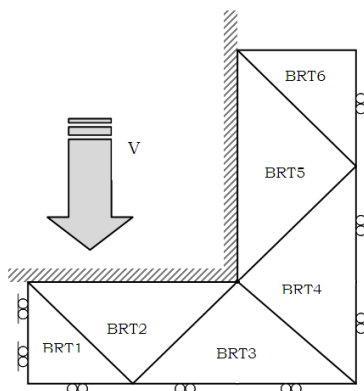


Figura 8: Modelo No Modular

La relación  $P/2k$  del módulo C arroja valores inferiores a la unidad (congruente con la no deformación plástica, pero incongruente con el efecto global de cálculo) por lo que, ya que forma parte de una superficie libre y el rozamiento puede considerarse despreciable, se opta por eliminarlo del estudio conjunto, simplificando las ecuaciones, obteniéndose unos valores ligeramente superiores a los anteriores y más cercanos al problema real de deformación. Por lo tanto, la ecuación final será la siguiente:

$$\frac{P}{2k} = \frac{\left(\frac{P}{2k}\right)_A b_1 + \left(\frac{P}{2k}\right)_B b_2}{(b_1 + b_2)} \tag{13}$$

### 3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se ha realizado la comparativa con un modelo No Modular, para comprobar la eficiencia del modelo Modular. La aplicación del TLS mediante BRT se ha aplicado a cada uno de los modelos expuestos en los gráficos (Figura 11 y Figura 10) para valores extremos de rozamiento, tanto de adherencia como de deslizamiento. Por el tipo de proceso a compresión, se ha optado por plantear el valor máximo de deslizamiento como 0.3, ya que valores superiores no se asimilan al problema real dado que la aportación del rozamiento por adherencia sería mucho mayor.

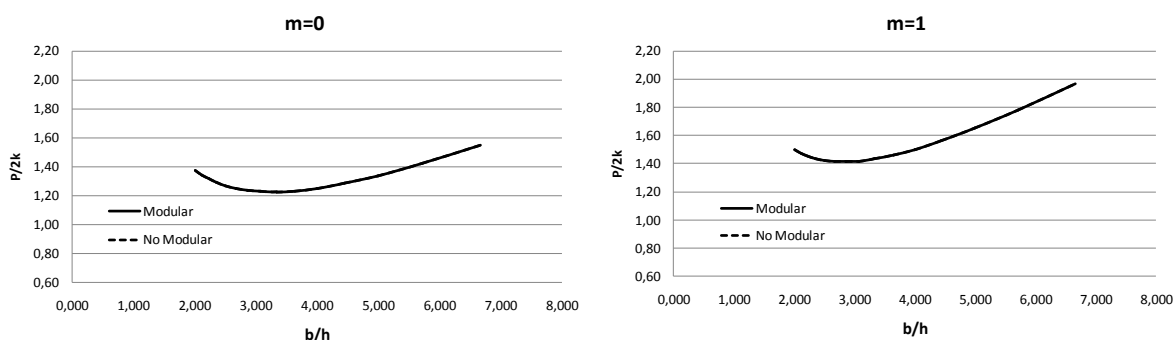


Figura 9: Comparativa rozamiento por Adherencia

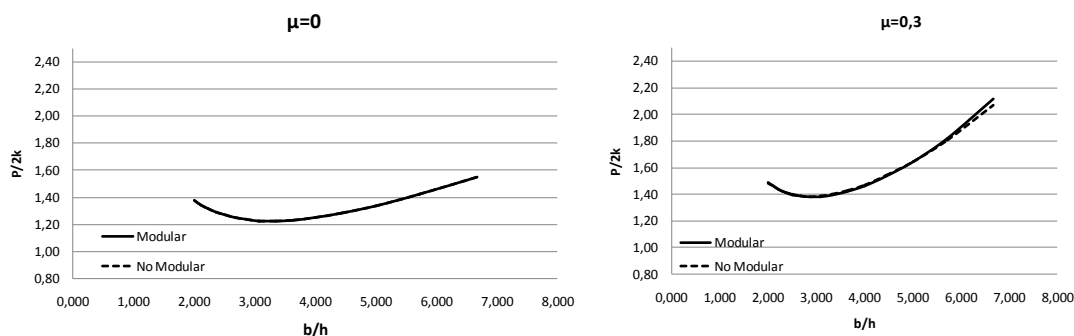


Figura 10: Comparativa rozamiento por Deslizamiento

En todo momento se obtienen resultados en concordancia con los obtenidos en otros procesos de conformado plástico, tanto estacionarios [6] como no estacionarios, siendo el comportamiento de ambos modelos muy similar para los factores de forma estudiados y expuestos.

Su evolución presenta, para ambos tipos de rozamiento, la forma característica de curvas de carga [8]-[5] respecto a diferentes situaciones del proceso, con la aparición de valores mínimos de la relación adimensional  $P/2k$  (donde  $P$  es la presión ejercida y  $k$  la tensión a cizalladura del material).

El modelo modular comienza a aportar datos relativamente mayores, en cuanto al rozamiento por deslizamiento, cuando el modelo se encuentra con factores de formar iguales o mayores que 6 ( $b/h = 6$ ). Esto es debido a las reducciones extremas de los módulos horizontales, por lo que el comportamiento de la gráfica vendría explicado por la acumulación de tensiones y el endurecimiento que sufre el material llegados a ese punto de deformación, ya que el material se encontraría con una reducción de altura del 70%. No obstante, no suelen considerarse factores de forma mayores de 4 o 5.

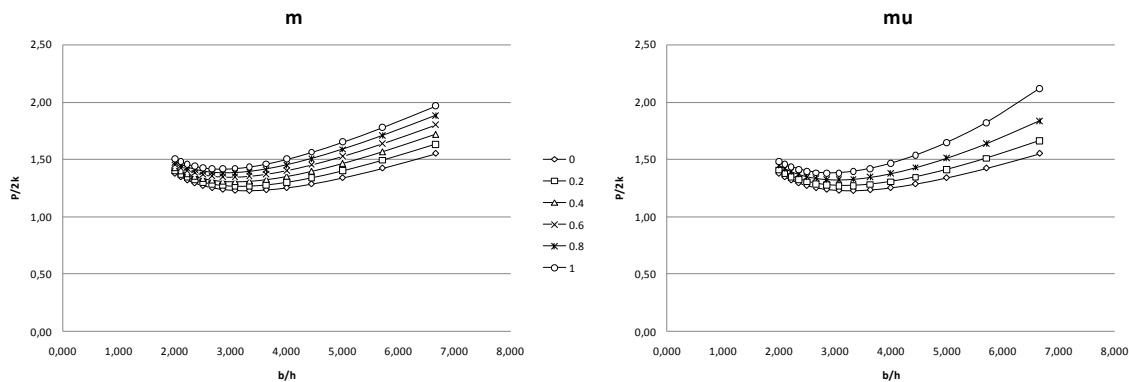


Figura 11: Variaciones de  $P/2k$  para distintos valores de  $m$  y  $\mu$

En las gráficas expuestas en la Figura 11 se muestra la evolución de los valores de la relación  $P/2k$  a través de los resultados obtenidos en función de la variación del coeficiente de adherencia  $m$  y deslizamiento  $\mu$ , desde su valor mínimo a su valor máximo, con un comportamiento similar en todos los valores del rango.

#### 4. CONCLUSIONES

Concluido el análisis del modelo e introduciendo ambos tipos de rozamiento para distintos factores de forma, se muestra la ventaja del menor coste computacional que ofrece este método de cálculo, así como el hecho de tener identificado en todo momento la evolución física del problema planteado.

El modelo Modular vuelve a ser la solución óptima para los estudios realizados, ya que satisface las condiciones iniciales de indentación, se ajusta plenamente a la deformación del material, ofrece un formato de cálculo mucho más sencillo y permite analizar los dos tipos de rozamiento considerados. Asimismo, la alternativa Modular presenta una alta versatilidad para modificar la disposición de los Bloques Rígidos Triangulares, obteniendo una adaptación óptima para cada configuración geométrica estudiada. Esta adaptación se realiza añadiendo más módulos, en caso de ser necesario. En este caso, y a diferencia del modelo No Modular, las ecuaciones no se complican en exceso, siendo similares a las que se han resuelto en el presente trabajo.

## 5. REFERENCIAS

- [1] C. Bermudo; F. Martín, L. Sevilla: *Application of the Upper Bound Element Technique with Triangular Rigid Blocks in Indentation*. CISIF-MESIC Conference Proceeding, (2011) FAB73-FAB76.
- [2] Martín, F.; Camacho, A.M.; Marín, M.; Sevilla, L.: *Parametrización de la aplicación de métodos analíticos y numéricos en forja en deformación plana*. Proceedings of the 1st CISIF-MESIC, Calatayud (2005).
- [3] Martín, F.; Sevilla, L.; Rubio, E.; Sebastián, M.A.: *Bases para la aplicación del Teorema del Límite Superior en procesos de forja sobre configuraciones geométricas modulares*. Proceedings of the 2nd CISIF-MESIC, Madrid (2007).
- [4] F. Martín; C. Bermudo; L. Sevilla: *Analytical approach to the indentation process. Application of the Upper Bound Element Technique*. Material Science Forum (2012) 13-18.
- [5] X. Li, Y. Huang: *Empirical models between user requirements and product structural variables: A hydraulic forging press case study*. Material. Science. Forum. 697-698 (2012) 779-784.
- [6] E.M. Rubio, R. Domingo, C. González, A. Sanz: *Análisis comparativo de modelos de bloques rígidos triangulares en el estudio mecánico de procesos de estirado por límite superior*. Revista de Metalurgia. Madrid, 40 (2004) 1-10.
- [7] J. Chakrabarty: *Theory of Plasticity Butterworth-Heinemann*, Oxford, UK (2006).
- [8] E.M. Rubio, M.A. Sebastián, A. Sanz: *Mechanical Solutions for drawing processes under plane strain conditions by the upper bound method*. J. Mat. Proc. Tech. 143-144 (2003) 539-545.
- [9] M. Huang, G. Tzou, R. Fung: *Upper Bound solution to compression forming of three-layer bounded clad sheet*. Key Eng. Mat. 340-341 (2007) 731-738.
- [10] Martín, F.: *Desarrollo, integración y Optimización en el estudio de procesos de forja mediante el TLS con el modelo de BRT*. Tesis Doctoral. Universidad de Málaga (2009).
- [11] F. Martín.; L. Sevilla; M.A. Sebastián: *Implementation of Technological and Geometrical Parameters in Forging Processes by Means of the Upper Bound Element Technique*, AIP Conference Proceedings, 1181(1) 455-463 (2009).
- [12] F. Martín, L. Sevilla, and M. A. Sebastián: *Optimización de módulos en la aplicación del Teorema del Límite Superior en procesos de forja* Anales de Ingeniería Mecánica, Ciudad Real (2010)