

# Análisis dinámico en manipuladores paralelos con movimientos parásitos

S. Herrero Villalibre<sup>(1)</sup>, Ch. Pinto<sup>(2)</sup>, J. Corral Sáiz<sup>(3)</sup>, J. Aginaga García<sup>(4)</sup>

(1) Dpto. de Ingeniería Mecánica. Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Bilbao. UPV/EHU  
Saioa.herrero@ehu.es

(2) Dpto. de Ingeniería Mecánica. Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Bilbao. UPV/EHU

(3) Dpto. de Ingeniería Mecánica. Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Bilbao. UPV/EHU

(4) Dpto. de Ingeniería Mecánica. Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Bilbao. UPV/EHU

---

*En este trabajo se lleva a cabo un estudio comparativo de la dinámica del manipulador paralelo 3-PRS entre el caso completo -teniendo en cuenta los movimientos parásitos- y un caso simplificado -despreciando los movimientos parásitos. Obtener un modelo dinámico simplificado es de gran interés para determinar las dimensiones de los actuadores y para resolver el problema dinámico de una forma mucho más sencilla y rápida. Para resolver el problema dinámico, se utiliza el método de Newton-Euler y mediante una simulación en Matlab se comparan las potencias necesarias al tener en cuenta los movimientos parásitos y al despreciarlos y comparándolas y viendo el error cometido, se podrá concluir si los movimientos parásitos pueden o no ser despreciados.*

---

## 1. INTRODUCCIÓN

El 3-PRS es un manipulador paralelo (MP) que pertenece a la categoría de MP de baja movilidad ya que posee 3 grados de libertad (GDL) y que está formado por una base fija y una móvil unidos por tres cadenas cinemáticas iguales formadas por un par prismático (P), un par de rotación (R) y un par esférico (S).

Como definieron Carretero et al. [1], cuando el movimiento principal tiene lugar, aparecen otra serie de movimientos en los GDL restringidos, y esos movimientos son los llamados movimientos parásitos. En ese trabajo, los autores encontraron que los movimientos parásitos son inherentes a la cinemática; cuando se esperan una traslación a lo largo del eje Z y dos rotaciones alrededor de los ejes X e Y, aparecen también una rotación alrededor del eje Z y dos traslaciones a lo largo de los ejes X e Y.

La precisión es un factor determinante en todas las aplicaciones de los manipuladores paralelos 3-PRS; una mejor precisión conlleva una mejor calidad del manipulador. La amplitud de los movimientos parásitos es normalmente pequeña, pero siempre reducen la precisión del manipulador. Por ello, se desea evitar los movimientos parásitos.

Igual que en este trabajo, Carretero et al.[1] se centraron en el MP 3-PRS cuyos planos que contenían los pares esféricos intersecaban en una línea común. En este caso, para una trayectoria general, los movimientos parásitos aparecían siempre. Presentaron un método para optimizar el manipulador de forma que se redujesen los movimientos parásitos y aumentase la precisión.

Li et al.[2] describieron la relación entre los movimientos parásitos y la colocación de las patas del MP 3-PRS. Se definieron cuatro categorías con siete subcategorías teniendo en cuenta esa disposición de las patas del MP. Encontraron que en algunos casos uno, dos o incluso los tres movimientos parásitos desaparecían.

Cuando aparece un movimiento parásito, se hace necesaria la utilización de una mesa de traslación para compensarlos, tal y como ocurre con el manipulador híbrido de 5 GDL estudiado por Gherman et al. [3]. Además, los movimientos parásitos provocan unos problemas de calibración importantes.

Para dimensionar los actuadores necesarios para mover el MP a lo largo de una trayectoria concreta, se tiene que resolver el problema dinámico del mismo. Por lo tanto, sería de gran interés tener un modelo del problema dinámico simplificado para determinar las dimensiones de los actuadores de los manipuladores 3-PRS usados en aplicaciones tan útiles como puede ser la orientación de placas solares, ya que obtener un modelo simplificado del problema dinámico significa que se podría resolver de una forma mucho más rápida y sencilla.

Li y Xu [4] presentaron un modelo simplificado del problema dinámico introduciendo una hipótesis simplificativa en el principio de los trabajos virtuales. Hao et al. [5] estudiaron el 3-SPS PM comparando la dinámica con y sin movimientos parásitos y concluyeron que en ese caso los movimientos parásitos podían ser despreciados.

Para dimensionar los actuadores, es necesario conocer los valores de la fuerza y la velocidad de los mismos; es decir, la potencia. En este trabajo se presenta un estudio comparativo de la dinámica del MP 3-PRS entre el caso completo –considerando los movimientos parásitos– y uno simplificado –ignorando los movimientos parásitos. Se muestran los valores de las potencias teniendo en cuenta los movimientos parásitos, así como las diferencias entre los valores de las potencias a ejercer por los actuadores con y sin movimientos parásitos.

La organización del trabajo es como se detalla a continuación. La descripción del manipulador paralelo 3-PRS, así como su análisis cinemático y dinámico son presentados en la sección 2. En la sección 3 se exponen los resultados obtenidos teniendo en cuenta los movimientos parásitos e ignorándolos y se da una comparación entre ellos. Y, finalmente, en la sección 4 se plantean las conclusiones.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL MANIPULADOR

El manipulador analizado en este trabajo consiste en una plataforma móvil y una fija unidas mediante tres cadenas idénticas, espaciadas de forma equidistante a  $120^\circ$ , tal y como se ve en la figura 1a:

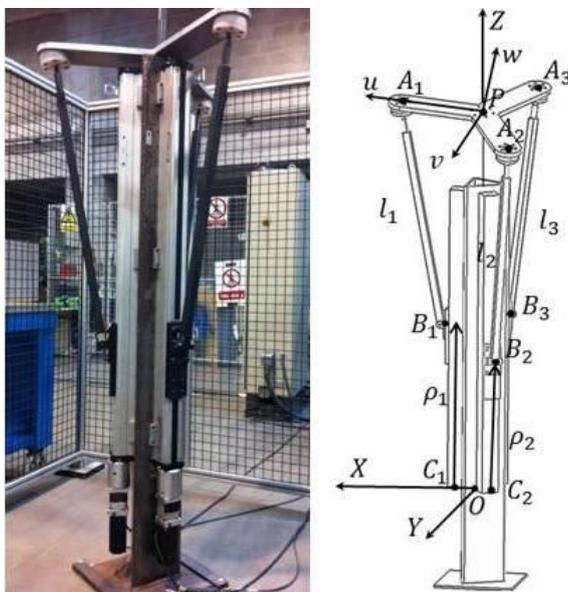


Figura 1. (a) Prototipo del MP 3-PRS; (b) Modelo CAD del MP 3-PRS

El manipulador tiene tres pares prismáticos actuados, con desplazamientos perpendiculares al plano de la base, que es horizontal. El final de cada actuador está unido al extremo inferior de una barra de longitud constante mediante un par de revoluciones no actuado. El extremo superior de cada barra está unido a la plataforma móvil mediante un par esférico.

Aplicando el criterio de movilidad de Hunt [6], el mecanismo resulta ser un manipulador de 3 GDL. Los 3 GDL que se pueden obtener son una traslación vertical y dos rotaciones

alrededor de dos ejes perpendiculares que intersecan en el centro de la plataforma móvil. Tal y como se puede apreciar en la figura 1b, se fija un sistema de coordenadas fijo,  $\{O-XYZ\}$ , en el centro de la base de la plataforma fija con el eje Z vertical y el eje X hacia el punto  $C_1$ . De forma similar, el sistema de coordenadas móvil,  $\{P-uvw\}$ , se define con el eje w normal al plano de la plataforma y el eje u apuntando hacia el punto  $A_1$ . Teniendo en cuenta esto, los movimientos de los 3 GDL son una traslación a lo largo del eje Z y dos rotaciones alrededor de los ejes X e Y ( $\psi$  y  $\theta$ , respectivamente). De este modo, los movimientos parásitos serán una rotación alrededor del eje Z ( $\Phi$ ) y dos traslaciones a lo largo de los ejes X e Y.

### 2.1. Problema de Posición

La ecuación de lazo del manipulador está dada por la Ec.(1):

$$\mathbf{p} = \mathbf{c}_i + \rho_i \mathbf{l}_i - \mathbf{r}_{A_i} \quad (1)$$

El problema de posición fue estudiado con detalle por Carretero et al. [1]. Obtuvieron la expresión de los movimientos parásitos, dada por las Ec.(2), Ec(3) y Ec.(4).

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{R}{S}\right) \quad (2)$$

Donde

$$\begin{aligned} R &= A(c\theta - c\psi) + Bs\theta \cdot s\psi \\ A &= c\alpha - c\beta \\ C &= (c\beta - 1)/\tan\beta - (c\alpha - 1)/\tan\alpha \\ S &= As\theta \cdot s\psi - Bc\theta + Cc\psi \\ B &= s\alpha - s\beta \end{aligned}$$

Y  $\alpha$ ,  $\beta$  son los ángulos entre los actuadores 1-2 y 1-3, respectivamente.

$$\begin{aligned} x &= -r_p (c\theta \cdot c\phi + s\psi \cdot s\theta \cdot s\phi) \cdot c\alpha - r_p (-c\theta \cdot s\phi + s\psi \cdot s\theta \cdot c\phi) \cdot s\alpha + \\ &+ \frac{r_p}{\tan\alpha} (c\psi \cdot s\phi \cdot (c\alpha - 1) + c\psi \cdot c\phi \cdot s\alpha) \end{aligned} \quad (3)$$

$$y = -c\psi \cdot s\phi \cdot r_p \quad (4)$$

Donde  $r_p$  es el radio de la plataforma móvil.

No hay dependencia de z en ninguna de las tres ecuaciones que definen los movimientos parásitos, pero todos los movimientos parásitos dependen de las rotaciones  $\psi$  y  $\theta$  y de los valores constantes  $\alpha$  y  $\beta$ .

Resolviendo el problema inverso de posición, se obtienen las expresiones para los actuadores, dadas por la Ec.(5):

$$\begin{aligned}
b_1 &= r_{1x} \pm \sqrt{l_1^2 - r_{1y}^2 - r_{1z}^2} \\
b_2 &= r_{2x}c\alpha + r_{2y}s\alpha \pm \sqrt{l_2^2 - (r_{2x}s\alpha - r_{2y}c\alpha)^2 - r_{2z}^2} \\
b_3 &= r_{3x}c\beta + r_{3y}s\beta \pm \sqrt{l_3^2 - (r_{3x}s\beta - r_{3y}c\beta)^2 - r_{3z}^2}
\end{aligned} \tag{5}$$

## 2.2. Ecuación de Velocidad

Si se deriva la ecuación de lazo, se obtiene la expresión vectorial de la velocidad de la plataforma móvil, Ec.(6):

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{0} + \dot{\rho}_i \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i - \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_{Ai} \tag{6}$$

Donde  $\dot{\rho}_i$  es la velocidad de cada actuador,  $\mathbf{k}$  es un vector unitario vertical,  $\boldsymbol{\omega}_i$  es la velocidad angular de los elementos  $\mathbf{l}_i$  y  $\boldsymbol{\omega}_p$  es la velocidad angular de la plataforma móvil.

Estas ecuaciones pueden ser desarrolladas y expresadas de forma matricial, Ec.(7):

$$\mathbf{J}_x \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p \\ \boldsymbol{\omega}_p \end{bmatrix} = \mathbf{J}_q \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Donde  $\mathbf{J}_x$  es la matriz Jacobiana inversa y  $\mathbf{J}_q$  es la matriz Jacobiana directa.

## 2.3. Ecuación de Aceleración

Derivando la expresión vectorial de la velocidad, se obtiene la expresión vectorial de la aceleración, Ec.(8):

$$\mathbf{a}_p = \ddot{\rho}_i \mathbf{k} + \mathbf{a}_i \times \mathbf{l}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{l}_i \times \boldsymbol{\omega}_i) - \mathbf{a}_p \times \mathbf{r}_{Ai} + \boldsymbol{\omega}_p \times (\mathbf{r}_{Ai} \times \boldsymbol{\omega}_p) \tag{8}$$

Estas ecuaciones pueden ser expresadas de forma matricial, Ec.(9):

$$\mathbf{H}_{px} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p \\ \boldsymbol{\omega}_p \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{pq} \begin{bmatrix} \ddot{\rho}_1 \\ \ddot{\rho}_2 \\ \ddot{\rho}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{H}_i \tag{9}$$

Donde  $\mathbf{H}_{px}$  es la matriz Hessiana inversa,  $\mathbf{H}_{pq}$  es la matriz Hessiana directa y  $\mathbf{H}_i$  es el término independiente.

## 2.4. Dinámica del Manipulador

Para estudiar la dinámica del manipulador se pueden emplear diferentes métodos. Xu et al. [7], por ejemplo, usaron la ley de la conservación de la energía para resolver el problema de fuerzas inversas y Müller [8] usó las ecuaciones lagrangianas del movimiento para modelar la dinámica de manipuladores paralelos actuados de forma redundante, mientras que Li y Xu [4] usaron una combinación de ambos. Tsai et al. [9] usaron el principio de los trabajos virtuales para resolver el problema dinámico inverso de un manipulador Gough-Stewart. En este trabajo se emplea el método más utilizado para resolver la dinámica inversa, que es el método de Newton-Euler. Autores como Li et al. [10] utilizaron este método para resolver el problema dinámico inverso de un manipulador paralelo espacial de 3 GDL.

La expresión utilizada para obtener las reacciones en las uniones es, Ec.(10):

$$\mathbf{M}_{\text{coef}} \cdot \mathbf{q}_{\text{din}} = \mathbf{f}_{\text{din}} \tag{10}$$

Donde  $\mathbf{M}_{\text{coef}}$  es la matriz de coeficientes que multiplica las fuerzas de enlace del problema dinámico,  $\mathbf{q}_{\text{din}}$  es el vector con las reacciones en los pares prismáticos y las rótulas y  $\mathbf{f}_{\text{din}}$  es el vector con las fuerzas del manipulador; es decir, las fuerzas aplicadas tanto gravitatorias como no gravitatorias y las fuerzas de inercia.

Para obtener la  $\mathbf{M}_{\text{coef}}$ , se realiza el análisis dinámico de la plataforma móvil y de las patas del manipulador. En la figura 3 se representa un esquema de la plataforma móvil con la notación utilizada:

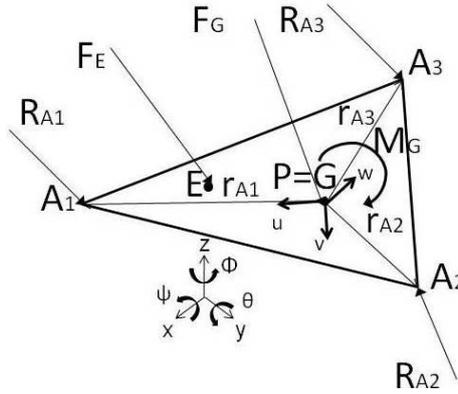


Figura 3. Esquema de la plataforma móvil

Expresando estos vectores en la base fija haciendo uso de la matriz de transformación correspondiente, la suma de las fuerzas aplicadas, las fuerzas inerciales, las fuerzas de enlace y los momentos referida a la base fija está dada por Ec.(11):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{A1} \\ \mathbf{r}_{A1} \times \mathbf{R}_{A1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{A2} \\ \mathbf{r}_{A2} \times \mathbf{R}_{A2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{A3} \\ \mathbf{r}_{A3} \times \mathbf{R}_{A3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_E \\ \mathbf{r}_E \times \mathbf{F}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_G \\ \mathbf{M}_G \end{bmatrix} \tag{11}$$

En la figura 4 se muestra un esquema de una pata del manipulador con los vectores utilizados:

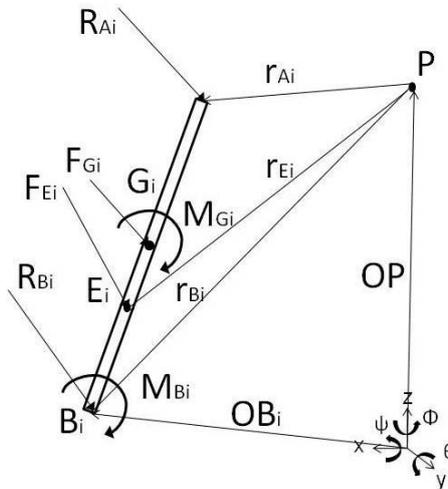


Figura 4. Esquema de la plataforma móvil

La suma de las fuerzas aplicadas, las fuerzas inerciales, las fuerzas de enlace y los momentos de cada pata referida al sistema de referencia fijo está dada por la Ec.(12):

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{Ai} \\ -\mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{R}_{Ai} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{Bi} \\ -\mathbf{r}_{Bi} \times \mathbf{R}_{Bi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{Bi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{Ei} \\ \mathbf{r}_{Ei} \times \mathbf{F}_{Ei} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{Gi} \\ \mathbf{M}_{Gi} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Con Ec.(11) y Ec.(12) se tiene un sistema de 24 ecuaciones y 24 incógnitas y la matriz  $\mathbf{M}_{\text{coef}}$  se puede definir como la matriz de coeficientes que multiplica a las fuerzas de enlace en el problema dinámico.

La potencia en los actuadores se obtiene conociendo la fuerza y la velocidad en los mismos, Ec.(13):

$$P_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{R}_{Bi} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \quad (13)$$

### 3. RESULTADOS

Para estudiar el comportamiento dinámico del manipulador, se ha llevado a cabo una simulación numérica mediante Matlab. Los valores geométricos utilizados y las propiedades de masa del 3-PRS se muestran en la tabla 1:

	<b>Descripción</b>	<b>Valor</b>
$m_p$	Masa de la plataforma móvil	9.35 kg
$m_i$	Masa de las patas	1.02 kg
$I_p$	Inercia de la plataforma móvil	0.35 kg
$I_i$	Inercia de las patas	2.13 10 <sup>-4</sup> kg•m <sup>2</sup>
$r_p$	Radio de la plataforma móvil	0.360 m
$r$	Radio de la plataforma fija	0.106 m

Tabla 1. Parámetros geométricos e inerciales

Se presentan dos trayectorias: la primera se trata de una rotación de 45° alrededor del eje X y, la segunda, de una rotación de 45° alrededor del eje Y. En ambos casos, el movimiento es dividido en tres etapas; en la primera, el manipulador se mueve con aceleración constante, en la segunda no tiene aceleración y en la última se mueve con deceleración constante. Los parámetros cinemáticos utilizados son los dados en la tabla 2:

	<b>Descripción</b>	<b>Valor</b>
$\dot{\psi}_{\text{máx}}$	Velocidad angular máx alrededor del eje X	10 rad/s
$\dot{\theta}_{\text{máx}}$	Velocidad angular máx alrededor del eje Y	10 rad/s
$t$	Tiempo usado en la trayectoria	9 s

Tabla 2. Parámetros cinemáticos

### 3.1. Rotación alrededor del eje X

En la figura 4a se presenta la potencia en los tres actuadores y en la figura 4b se tiene el error absoluto entre la potencia del caso real y del caso sin movimientos parásitos para el mismo caso de rotación.

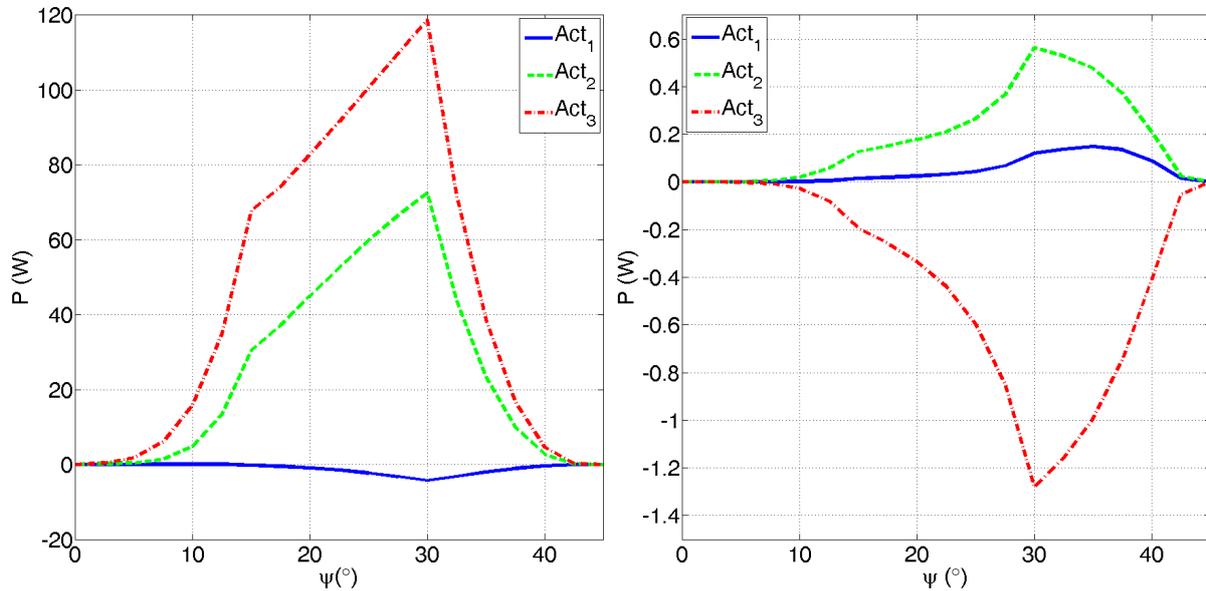


Figura 4. Rotación alrededor de X: (a) potencia de los actuadores con movimiento parásito; (b) error absoluto entre el caso real y el caso sin movimientos parásitos

En la figura 4b se ve que el error absoluto de la potencia para una rotación de  $45^\circ$  alrededor del eje X es menor que 1.25 W.

Teniendo en cuenta que el error absoluto de las potencias es muy pequeño, los movimientos parásitos pueden ser despreciados en la resolución del problema dinámico.

### 3.2. Rotación alrededor del eje Y

En la figura 5a se presenta la potencia en los actuadores y en la 5b, los errores absolutos de dichas potencias al comparar el caso real con el caso simplificado sin movimientos parásitos:

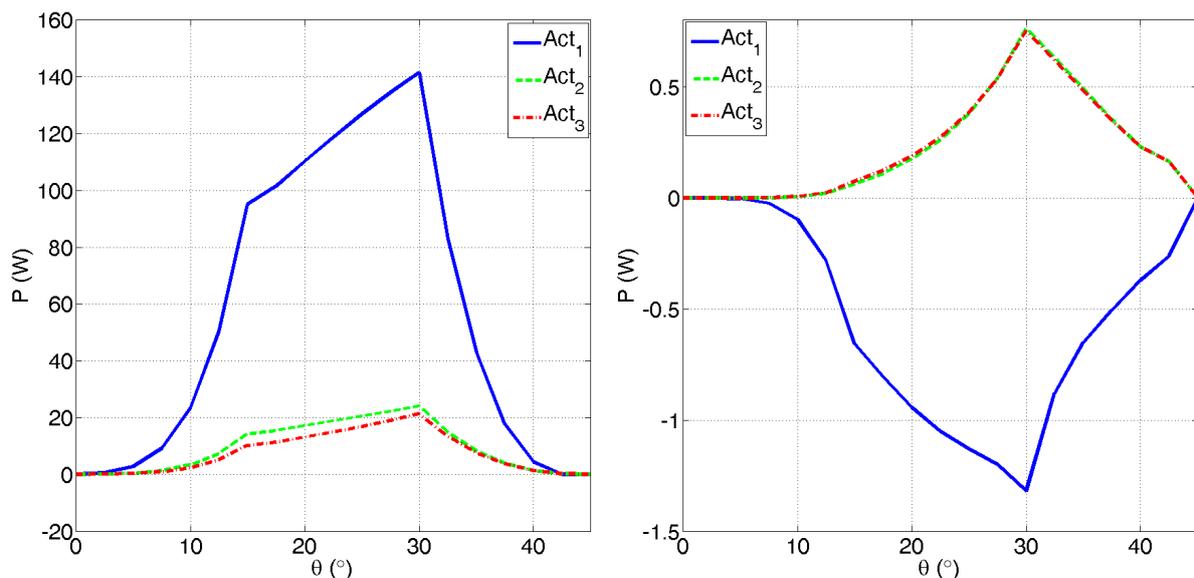


Figura 5. Rotación alrededor de Y: (a) potencia en los actuadores con movimientos parásitos; (b) error absoluto entre el caso real y el caso sin movimientos parásitos

Tal y como se ve en la figura 5b, el error absoluto de la potencia para una rotación de  $45^\circ$  alrededor del eje Y es menor que 1.3 W.

Debido al pequeño error cometido en las potencias, los movimientos parásitos pueden ser ignorados, reduciendo se este modo el coste computacional sin perder precisión en el dimensionamiento de los actuadores.

#### 4. CONCLUSIONES

El análisis dinámico del manipulador paralelo 3-PRS con y sin movimientos parásitos es estudiado en este trabajo usando el método de Newton-Euler. Se presenta una simulación numérica mediante Matlab y se demuestra que el error en potencia en los actuadores tiene poca influencia en el análisis dinámico para las trayectorias de giro estudiadas. Por lo tanto, los movimientos parásitos pueden ser despreciados en el estudio de la dinámica del MP 3-PRS. Este resultado ha sido determinado para un rango de giro de  $[0^\circ, 45^\circ]$  en las variables de salida  $(\psi, \theta)$ .

#### 5. AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren agradecer la financiación recibida del Gobierno Español a través del Ministerio de Economía y Competitividad (Proyecto DPI2011-22955), y de la Unión Europea (Proyecto FP7-CIP-ICT-PSP-2009-3), así como del Gobierno de la Comunidad Autónoma Vasca a través del Departamento de Educación, Universidades y de Investigación (Proyecto IT445-10) y la beca Ref: BFI-2011-443 MOD. AE.

#### 6. REFERENCIAS

- [1] J.A. Carretero, R.P. Podhorodeski, M.A. Nahon, and C.M. Gosselin, "Kinematic analysis and Optimization of a New Three Degree-of-Freedom Spatial Parallel Manipulator" *Journal of Mechanical Design.*, Vol. 122 (2000), 17-24.
- [2] Q. Li, Z. Chen, Q. Chen, C. Wu and X. Hu. "Parasitic motion comparison of 3-PRS parallel mechanism with different limb arrangements". *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing.* Vol. 27 (2011), 389-396.
- [3] B. Gherman, D. Pislă, C. Vaida and N. Plitea, "Development of inverse dynamic model for a surgical hybrid parallel robot with equivalent lumped masses" *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing.* Vol. 28 (2012), 402-415.
- [4] Y. Li and Q. Xu, "Kinematics and inverse dynamics analysis for a general 3-PRS spatial parallel mechanism" *Robotica*, Vol. 23, (2005), 219-229.
- [5] Q. Hao, L. Wang, L. Guan and X-L. Liu, "Dynamic Analysis of a Novel 3-PSP 3-DOF Parallel Manipulator" *ASME/IFToMM International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots*, (2009).
- [6] K. H. Hunt, "Kinematic Geometry of Mechanisms" *Oxford Science Publications*, (1978).
- [7] Y. Xu, J. Yao, Y. Zhao, "Inverse dynamics and internal forces of the redundantly actuated parallel manipulators". *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 51 (2012), 172-184.
- [8] A. Müller, "Effects of geometric imperfections to the control of redundantly actuated parallel manipulators". *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (2009).
- [9] L-W. Tsai, "Solving the Inverse Dynamics of a Stewart-Gough Manipulator by the Principle of Virtual Work". *Journal of Mechanical Design*, Vol. 122 (2000), 3-9.
- [10] Y-W. Li, J-S. Wang, L-P. Wang, X-J. Liu, "Inverse dynamics and simulation of a 3-DOF spatial parallel manipulator". *Proceedings of the 2033 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, (2003).