



## Estudio de la influencia de los errores de posición en el reparto de carga en transmisiones planetarias

M. Iglesias Santamaría, A. Fernández del Rincón, A. de Juan de Luna,  
P. García Fernández, R. Sancibrián Herrera, F. Viadero Rueda

Dpto. de Ingeniería Estructural y Mecánica. Universidad de Cantabria  
fernandra@unican.es

---

*En esta contribución se utiliza un modelo avanzado de engrane, desarrollado previamente por los autores, para el estudio de la influencia de los errores de posicionamiento de los planetas en el comportamiento de las transmisiones planetarias. Con el fin de ser adaptado a este tipo de transmisión, el modelo ha sido ampliado y mejorado, incluyendo la posibilidad de engrane interno. Se presentan las nuevas características del modelo, así como un resumen del planteamiento general del mismo. La influencia de los errores de posicionamiento de los planetas sobre el comportamiento de la transmisión se estudia de manera cuasiestática, en base al distinto reparto de cargas que produce cada uno de los errores. En este trabajo se analizan de manera independiente errores de posicionamiento tangencial y radial, y se tiene además en cuenta el efecto del nivel de carga. Con el fin de mostrar las bondades del modelo se utilizan dos configuraciones distintas de transmisión; la primera con el engranaje sol fijo y la segunda con una disposición flotante del mismo.*

---

### 1. INTRODUCCIÓN

Actualmente existe un creciente interés en el modelado de transmisiones mediante engranajes, debido a las altas exigencias de par, velocidad, compacidad y fiabilidad que estos sistemas mecánicos deben satisfacer. Cuanto mayor sea el conocimiento disponible sobre el comportamiento del sistema, así como sobre los distintos fenómenos subyacentes durante su funcionamiento, mejores serán las posibilidades del ingeniero de satisfacer aquellas demandas. Es en este aspecto donde el modelado físico de transmisiones mediante engranajes juega un papel clave: en la aportación al conocimiento de los mecanismos por los cuales la transmisión se comporta de la manera que lo hace, y es así como la investigación en esta línea pretende derivar en procesos de diseño más efectivos y en la elaboración de mejores herramientas de mantenimiento predictivo y en condición operativa [1]. El aumento en la capacidad computacional de las herramientas a disposición de los investigadores para implementar estos modelos físicos de transmisiones también ha contribuido a potenciar el interés en el modelado, por ser posible obtener resultados con un alto grado de precisión en un tiempo cada vez menor.

Debido a su configuración espacial, las transmisiones planetarias son particularmente complicadas de modelizar. Sin embargo, dada la importancia crítica que estos sistemas tienen, por su utilización en la industria aeroespacial, en aplicaciones de generación energética y en la industria automovilística, su estudio mediante modelos es muy interesante y potencialmente rentable.

Una de las ventajas fundamentales que las transmisiones planetarias presentan frente a las convencionales es su compacidad. Para elevados pares, una posibilidad de diseño de transmisión mecánica mediante engranajes es el aumento de tamaño de las ruedas, ensanchándolas y ampliando por lo tanto su capacidad de carga. Esto no siempre es práctico o posible, y una mejor solución es dividir la carga en un cierto número de caminos, repartiendo así la potencia entre varios piñones, de manera que la carga por unidad de ancho de diente permanece constante en su valor nominal, mientras que el par total transmitido se multiplica. Las transmisiones planetarias utilizan esta solución, presentando

además una gran versatilidad y elevadas relaciones de transmisión, siendo las más compactas y ligeras de las transmisiones mediante engranajes [2].

En condiciones ideales, cada uno de los piñones (planetas) entre los que se divide la carga en una transmisión planetaria transmite la misma potencia que los demás. Sin embargo, en los sistemas reales existen inevitables desviaciones, debidas a errores de fabricación y tolerancias, que provocan que la potencia no sea repartida de manera equitativa entre cada uno de los diferentes planetas. Esta diferencia en el reparto de la carga deriva en problemas de fiabilidad (valores de carga por ancho de diente mayores que los nominales) y en un peor comportamiento dinámico.

Existen diversos métodos, incluyendo sistemas patentados, para mejorar el reparto de cargas en las transmisiones planetarias. El más sencillo de todos consiste en permitir que uno de los miembros centrales se traslade libremente en el espacio (sistemas flotantes). Otra opción para transmisiones con elevada potencia es el diseño de coronas flexibles que acomoden las desviaciones, mientras que una tercera variante incluye soportes flexibles para los planetas que absorban los errores de fabricación.

El problema del reparto de carga en transmisiones planetarias se ha planteado y discutido en numerosas publicaciones, tanto desde un punto de vista experimental [3, 4], como de manera más frecuente siguiendo enfoques de modelado de transmisión. Este último grupo de publicaciones aborda el reparto de carga desde la utilización de sencillos modelos analíticos [5], hasta modelos complejos con técnicas híbridas de elementos finitos y formulaciones analíticas [6,7]. En este trabajo el modelo de transmisión desarrollado por los autores se pone a prueba con el estudio del reparto de carga en las transmisiones planetarias ante la variación de diversos parámetros.

## **2. MODELO DE TRANSMISIÓN MEDIANTE ENGRANAJES**

El modelo de transmisión empleado en este trabajo se describe en detalle en [8, 9], por lo que a continuación se repasan las características y enfoques fundamentales empleados en el mismo. Inicialmente, se han de definir los perfiles de diente. En este modelo la generación del perfil de los engranajes externos se hace mediante una herramienta de cremallera a partir del enfoque vectorial planteado por Litvin [10]. Esto permite una gran versatilidad en cuanto a la posibilidad de generar engranajes corregidos, además de permitir contemplar cuestiones como el socavamiento o las interferencias de tallado en general. Se añade además un redondeo en la punta de los dientes, para evitar la singularidad de un contacto en arista. Para este trabajo han sido necesarios perfiles interiores para modelizar la corona de la transmisión planetaria, que han sido definidos directamente empleando un tramo de evolvente y dos tramos de arco de circunferencia, uno para la punta del diente y otro sustituyendo a la trocoide de la raíz del diente. Partiendo de las propiedades analíticas de los perfiles de evolvente y de los tramos de redondeo, se definen los puntos potenciales en los que puede haber contacto, así como las distancias de separación (en adelante solapamientos geométricos) entre dichos puntos de cada rueda en función de la posición de los engranajes. Este denominado solapamiento geométrico indica contacto entre perfiles para valores positivos del mismo, y así se corresponde con la deformación que deben experimentar los dientes y engranajes para encajar en una determinada posición. El modelo es capaz de distinguir entre dos tipos de contacto: contacto evolvente-evolvente y contacto evolvente-arco de redondeo. Los engranajes reales a menudo incluyen modificaciones de perfil para evitar contactos fuera de la línea de acción, proporcionando de esta manera un funcionamiento más suave, pero incluso en estos casos pueden llegar a darse contactos entre flancos y puntas de dientes (por ejemplo, debido a una sobrecarga). El modelo es capaz de modelizar estos contactos fuera de la línea de acción entre perfiles no conjugados, y deliberadamente no se introducen modificaciones en la forma de los dientes para mostrar esta capacidad. En este trabajo fue necesario generalizar el método de búsqueda de puntos de contacto y el cálculo de los solapamientos geométricos, de manera que tuviera validez indistintamente para contactos externos e internos, tal y como se muestra en la figura 1 para una posición de solapamiento deliberadamente exagerada.

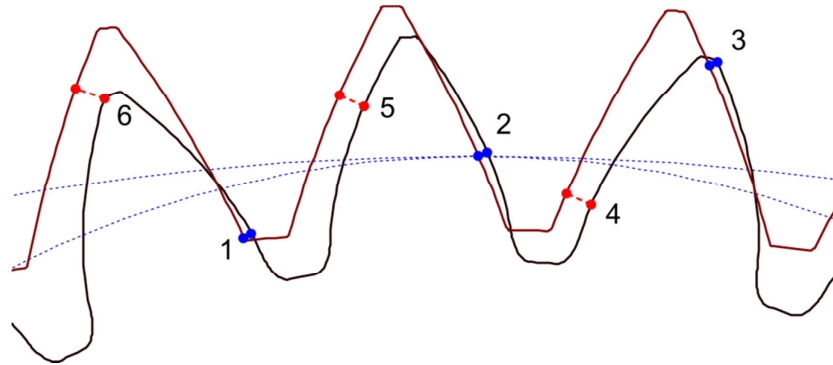


Figura 1. Puntos de contacto potencial y solapamientos geométricos para los engranes interiores

Una vez que la geometría del problema queda definida, y los puntos potenciales de contacto así como los solapamientos geométricos calculados, las fuerzas de contacto se obtienen con un método derivado del propuesto por Andersson and Vedmar [11]. Para la determinación de las fuerzas, se hace necesario disponer de una relación entre éstas y las deformaciones producidas (que se corresponden con los valores de solapamiento geométrico). La deformación total se considera dividida en dos tipos o componentes. Por un lado se encuentra la deformación “local”, calculada mediante una formulación analítica no-lineal de tipo Hertziano y que se corresponde con la deformación en la zona cercana al punto de contacto. Por otro lado está la deformación “estructural”, de naturaleza elástica, que se corresponde con la deformación del engranaje en zonas suficientemente alejadas del punto de contacto, y que se calcula mediante el uso de técnicas de elementos finitos. La deformación total experimentada por los puntos de contacto viene dada por la adición de ambas componentes, “local” y “estructural”. La carga en los dientes se calcula entonces resolviendo un sistema no-lineal de ecuaciones atendiendo a dos condiciones. La primera es la condición de compatibilidad, según la cual la deformación total ha de ser igual al solapamiento geométrico obtenido por los desplazamientos de sólido rígido de los engranajes en la posición dada. La segunda es la condición de complementariedad, en la que se elimina la posibilidad de que aparezcan cargas en los puntos de contacto con valores negativos de solapamiento geométrico, dado que en ellos no se produce contacto real.

El uso de este planteamiento a la hora de calcular las fuerzas de contacto plantea una serie de ventajas. Normalmente, el tamaño de la zona de contacto entre engranajes es dos órdenes de magnitud más pequeño que el tamaño de los dientes [6]. Esto supone la necesidad de una malla extremadamente fina en dicha zona de contacto si el problema ha de ser resuelto mediante únicamente un modelo de elementos finitos. Además, dado que la zona de contacto se va desplazando durante el proceso de engrane, el mallado fino ha de ser reubicado para cada posición de cálculo. Con el enfoque empleado en este trabajo, no es necesario un alto grado de refinamiento de la malla, así como tampoco es preciso remallar para cada posición; esto reduce enormemente el coste computacional, abriendo las puertas al análisis dinámico.

### 3. MODELO DE TRANSMISIÓN PLANETARIA

El modelo presentado en este artículo es de una transmisión planetaria con una sola etapa basada en una reductora real para maquinaria agrícola. En la tabla 1 se muestran algunos de los parámetros más importantes de la misma. La transmisión consta de tres planetas igualmente espaciados, siendo el desfase entre los engranes de un planeta con los del siguiente de  $2\pi/3$  radianes. Para cada planeta, el engrane con el sol y con la corona también presenta un cierto desfase. La configuración elegida para el estudio realizado en este trabajo considera la aplicación de un par de entrada  $T_{EXT}$  en el sol, con las reacciones correspondientes aplicadas en el portasatélites y la corona. En cuanto a los grados de libertad necesarios para definir la posición angular de la transmisión, el primero de ellos es el ángulo de rotación de la corona ( $\theta_{corona}$ ), que se encuentra fija, y el segundo la rotación del portasatélites ( $\theta_{portasatélites}$ ).

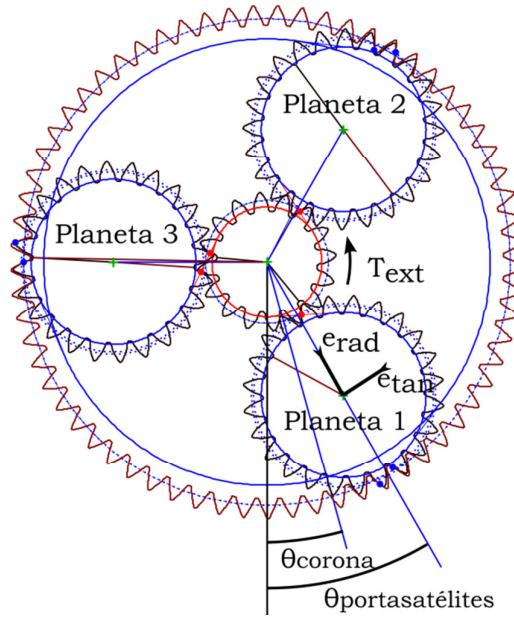


Figura 2. Modelo de transmisión planetaria

Se presentan dos casos de transmisión planetaria, atendiendo a la posibilidad de existencia o no de traslación para el eje del sol (se denominará sistema flotante en el caso de que sí exista traslación y fijo en el caso contrario). Como se explicó en la introducción, esta cuestión juega un papel muy importante en el comportamiento de la transmisión, pudiéndose observar grandes variaciones en el modo en el que se reparten la carga cada uno de los planetas. Con el fin de estudiar estas variaciones en el reparto de carga en función de los errores de posicionamiento de los planetas, se definen además de los grados de libertad mencionados anteriormente las desviaciones tangenciales y radiales que puedan tener los planetas ( $\epsilon_{tan}$ ,  $\epsilon_{rad}$  respectivamente), tal y como se muestra en la figura 2.

El número de dientes en contacto en la transmisión ejemplo fluctúa entre 1 y 2 para el engrane del sol con los planetas y entre 2 y 3 para el engrane de los planetas con la corona, teniendo en cuenta valores nominales de carga y ausencia de errores de posicionamiento. El análisis realizado en este trabajo se corresponde con un proceso de carga cuasiestática, con el equilibrio dado para cada uno de los planetas por la ecuación 1 y para el sol en el sistema fijo por la ecuación 2:

$$T_{engrane_{S-p_i}} + T_{engrane_{C-p_i}} = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^3 T_{engrane_{p_i-s}} + T_{ext} = 0 \quad (2)$$

donde cada una de las  $T_{engrane}$  son los pares en los planetas debidas bien al engrane con el sol (S-P), o bien debidas al engrane con la corona (C-P). Además de estas ecuaciones de equilibrio rotacional, para el caso del sistema flotante es necesario añadir la ecuación 3 para el cálculo del equilibrio de fuerzas a lo largo del eje x e y del eje sol, siendo estas coordenadas grados de libertad del problema:

$$\sum_{i=1}^3 F_{engrane_{p_i-s}} = 0 \quad (3)$$

De esta manera, para cada posición de la transmisión planetaria, definida por el giro nulo de la corona y el giro del portasatélites, así como por los parámetros de par de entrada y

errores de posicionamiento cuando éstos procedan, se obtienen las fuerzas de contacto, los errores de transmisión y el reparto de carga en el sistema.

	<b>Sun</b>	<b>Planet</b>	<b>Ring</b>
Dientes	16	24	65
Modulo	4.23 mm	4.23 mm	4.23 mm
Ancho de rueda	25 mm	25 mm	25 mm
Angulo de presión (cremallera)	25°	25°	25°
Addendum (cremallera)	1.35m	1.35m	-
Deddendum (cremallera)	1.15m	1.25m	-
Redondeo punta (cremallera)	0.05m	0.05m	-
Redondeo base diente	-	-	0.05m
Redondeo punta (rueda)	0.05m	0.05m	0.05m
Radio eje	20 mm	20 mm	156.4 mm
Modulo elástico	207 Gpa		
Coef. Poisson	0.3		

Tabla 1. Parámetros de la transmisión

#### 4. REPARTO DE CARGA ENTRE PLANETAS

En este artículo se ha definido el reparto de carga como la relación existente entre el par generado en el sol por cada uno de los engranes con los planeta y el par total de entrada. De esta manera se definen tres ratios de reparto de carga RRC, uno para cada planeta, como:

$$RRC_i = \frac{T_{engranepi-s}}{T_{ext}} \quad (4)$$

Idealmente, el RRC debería valer 1/3 para un planetario como el del ejemplo con tres planetas, de tal manera que cada uno de ellos transmitiera la misma cantidad de potencia. A lo largo de esta sección, con la ayuda del modelo presentado, se van a discutir los valores reales del RRC que se encuentran para los distintos casos (sistema flotante y fijo), y la evolución del mismo cuando se introducen errores de posicionamiento en los planetas o se varía el nivel de carga en el sistema.

##### 4.1. Sistema fijo

En un sistema fijo, los ejes centrales no tienen posibilidad de traslación, por lo que la única posibilidad de movimiento relativo entre engranajes viene dada por la rotación de los mismos. Se pueden distinguir dos fuentes de desigualdad en el reparto de cargas entre planetas. La más evidente de ellas es las diferencia entre las rigideces de engrane para cada uno de los caminos a recorrer por la potencia en la transmisión. En sistemas con desfase de engrane entre ruedas el número de dientes en contacto difiere de un planeta a otro para cada posición, haciendo que ciertas combinaciones de engrane sol-planeta-corona sean más rígidas que otras, y llevándose consecuentemente una mayor ratio de carga. La segunda fuente de desigualdad en el reparto viene dada por la precarga de determinadas ruedas debido a errores de posicionamiento. Uno de los engranajes entra en carga antes o después que los demás (en definitiva se modifican los valores de juego para cada engrane), de manera que se acaba desequilibrando el reparto de par entre satélites. En la figura 3 se puede observar el efecto de estos dos tipos de fuente de desequilibrio sobre el reparto de cargas en un sistema fijo. En la figura 3a se observa el RRC para el caso de una transmisión sin errores de posicionamiento, en la que toda las desviaciones son producidas por los distintos valores que presentan las rigideces de contacto a lo largo del ciclo de engrane. Es fácil observar que el RRC para cada uno de los planetas muestra el mismo patrón, con el correspondiente desfase de  $2\pi/3$ . La variación máxima es de unos 4 puntos porcentuales alrededor del valor ideal de 1/3 cuando la carga aplicada es de 400 N·m.

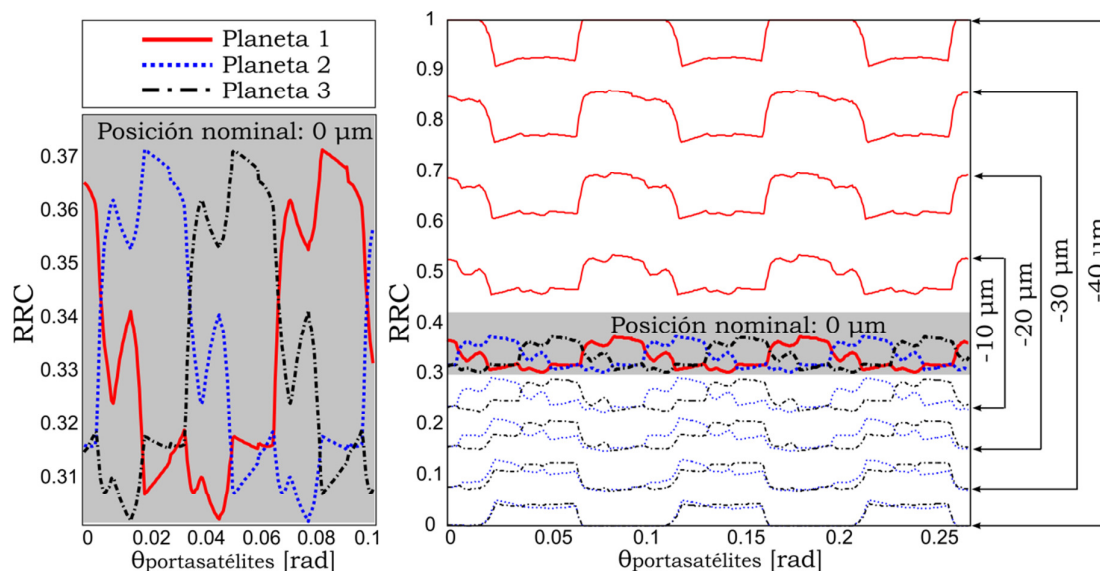


Figura 3 a) RRC sin errores

b) RRC para distintos valores de  $e_{tan}$

En la figura 3b se muestran los valores del RRC para los 3 planetas y el mismo par exterior aplicado cuando uno de los engranajes presenta un error de posicionamiento tangencial de entre -10 y -40  $\mu\text{m}$ . De la comparación entre ambas gráficas resulta evidente que los errores de posicionamiento tienen una influencia mucho mayor en el reparto de carga que las diferencias en las rigideces de engrane, a pesar de que el efecto de éstas sigue siendo visible. En la figura 4a se puede observar el efecto de los errores de posicionamiento radiales sobre el reparto de cargas en la transmisión fija. Este tipo de error tiene una influencia casi despreciable en el RRC, si bien es perfectamente apreciable. El motivo de su escaso efecto se debe a que la traslación radial de un planeta produce un adelanto o retraso en el proceso de entrada en carga con el sol, mientras que produce el efecto contrario sobre el proceso de entrada en carga con la corona. Esto provoca una compensación entre ambos efectos, haciendo que la variación en el RRC sea visible únicamente cuando los ángulos de presión operacionales para cada tipo de engrane (S-P o C-P) son distintos.

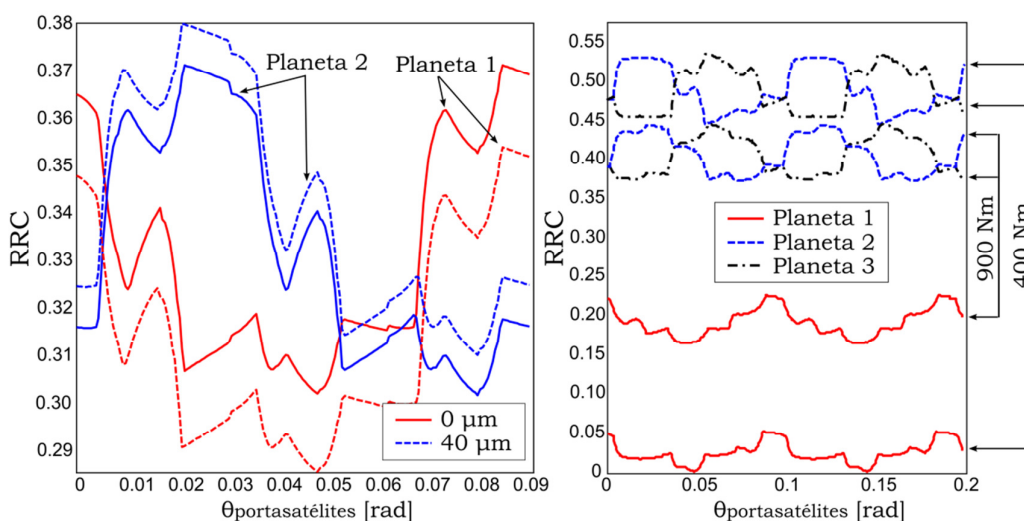


Figura 4 a) RRC con  $e_{rad}$

b) RRC con  $e_{tan}$  para distintos valores de par

La influencia del nivel de carga en el RRC cuando existen errores posicionales se puede ver en la figura 4b, para un error de posicionamiento tangencial de  $20 \mu m$ . Las diferencias en el reparto de carga se diluyen significativamente a medida que se incrementa el nivel de carga. La explicación a este hecho viene dada porque mayores fuerzas de contacto conllevan mayores deformaciones, y por lo tanto una mayor implicación relativa del satélite retrasado en el proceso de carga sobre el total de par transmitido.

#### 4.2. Sistema flotante

En un sistema flotante, el sol puede acomodar el efecto de los errores de posicionamiento, trasladándose en una órbita que mejore la simetría entre las fuerzas de engrane. Esto se debe a que la composición de los vectores de fuerzas aplicadas sobre el sol ha de ser un polígono cerrado (triangular para este caso concreto) que satisfaga la ecuación 3. Este hecho no sucede para la configuración fija, al proporcionar el apoyo del eje del sol la reacción necesaria para el equilibrio estático del problema. En la figura 5a se presenta la órbita que realiza el sol en una vuelta completa del portasatélites para un par exterior de  $400 N \cdot m$  y un error tangencial de  $80 \mu m$  en uno de los planetas. Con ayuda de la ventana se puede apreciar el detalle de la trayectoria, en la que se observa el efecto de los contactos fuera de la línea de acción, dado que no se han introducido rebajes en la punta de los dientes ni otras modificaciones de perfil que suavicen el proceso de engrane.

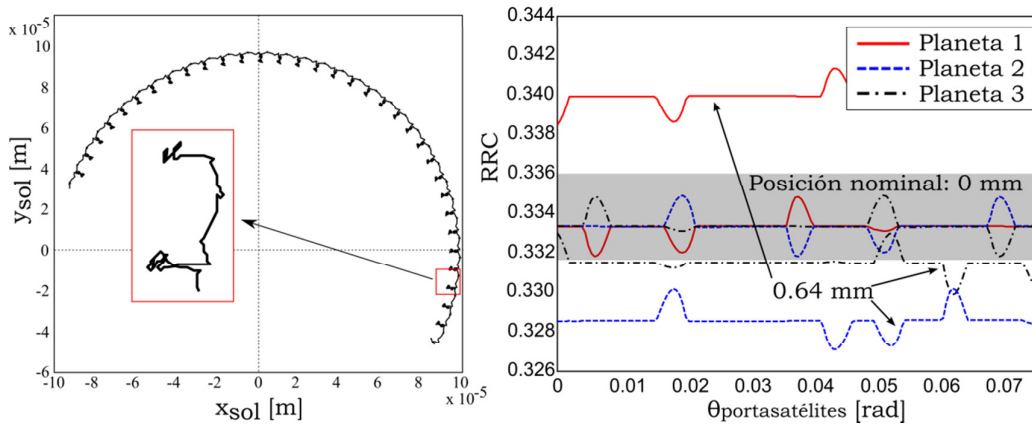


Figura 5 a) Órbita del sol con un  $e_{tan}$  de  $80 \mu m$  b) RRC nominal y con  $e_{tan}$  (sistema flotante)

En la figura 5b se presenta el RRC resultante para una transmisión sin errores. A diferencia de lo mostrado en la figura 3, el reparto de carga es idéntico para los tres planetas y de valor  $1/3$ , con la salvedad de los picos producidos por los contactos fuera de la línea de acción (donde se producen grandes variaciones en los ángulos de presión). Se representa además el RRC resultante de aplicar un error de posicionamiento de  $640 \mu m$ , apreciándose como las diferencias en el reparto de carga se mantienen dentro del 1% de variación sobre el total transmitido a pesar del alto valor de error aplicado. En estas gráficas se pueden ver también las consecuencias de los contactos en las puntas de los dientes.

En la bibliografía es fácil encontrar afirmaciones al respecto de las configuraciones con sol flotante para 3 satélites [12], aseverando que el reparto de carga es perfecto independientemente del error de posicionamiento, pero a la luz de lo presentado aquí es evidente que si bien las diferencias pueden considerarse despreciables, el reparto no es por definición perfecto. Esto es debido a la pérdida de simetría del problema (el triángulo de fuerzas resultado de la composición de fuerzas de engrane sobre el sol no es exactamente equilátero).

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un modelo de transmisión planetaria mediante engranajes, elaborado a partir de un modelo de transmisión simple desarrollado con anterioridad por los autores. Se ha empleado dicho modelo para estudiar el efecto de los errores de posicionamiento de los planetas sobre el ratio de reparto de cargas entre los mismos. Se ha estudiado asimismo el reparto de carga para dos configuraciones posibles de transmisión planetaria, la primera de ellas con todos sus elementos centrales fijos (únicamente grados de libertad rotacionales), y la segunda de ellas permitiendo que el eje del sol se traslade libremente, al ser esta una de las opciones más extendidas para la mejora del reparto de carga. Además de los errores de posicionamiento, se ha tenido en cuenta la posible influencia que pudiera tener el nivel de par exterior aplicado sobre el reparto de la carga entre los distintos planetas. Los resultados obtenidos cuasiestáticamente muestran una gran consistencia con los valores esperados de reparto de carga para cada caso en términos cualitativos, demostrando la validez y capacidad del modelo para la simulación del comportamiento de transmisiones planetarias bajo un amplio rango de parámetros y condiciones de operación.

## 6. REFERENCIAS

- [1] A. Heng, S. Zhang, A.C.C. Tan, J. Mathew, *Rotating machinery prognostics: State of the art, challenges and opportunities*, Mechanical Systems and Signal Processing 23(3) (2009), 724–739.
- [2] J.D. Smith, *Gear Noise and Vibration*. Marcel Dekker Inc. (1999).
- [3] T. Hayashi, Y. Li, I. Hayashi, K. Endou, W. Watanabe, *Measurement and some discussions on dynamic load sharing in planetary gears*, Bulletin of the JSME 29(253) (1986), 2290–2297.
- [4] T. Hidaka, Y. Terauchi, *Dynamic behavior of planetary gear - 1st report, load distributions in planetary gear*, Bulletin of the JSME 19(132) (1976), 690–698.
- [5] A. Singh, *Load sharing behavior in epicyclic gears: Physical explanation and generalized formulation*. Mechanism and Machine Theory 45(3) (2010), 511–530.
- [6] A. Bodas, A. Kahraman, *Influence of carrier and gear manufacturing errors on the static load sharing behavior of planetary gear sets*, JSME International Journal, Series C: Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing 47(3) (2004), 908–915.
- [7] V. Abousleiman, P. Vexlex, S. Becquerelle, *Modeling of Spur and Helical Gear Planetary Drives With Flexible Ring Gears and Planet Carriers*, Journal of Mechanical Design 129 (2007), pp. 95–106.
- [8] A.F. del Rincon, F. Viadero, M. Iglesias, A. de Juan, P. Garcia, R. Sancibrian, *Effect of cracks and pitting defects on gear meshing*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science (2012).
- [9] F. Viadero, A.F. del Rincon, R. Sancibrian, P.G. Fernandez, A.D. Juan, *A model of spur gears supported by ball bearings*, 13th International Conference on Computational Methods and Experimental Measurements CMEM, WIT Press (2007), pp. 711–722.
- [10] F. Litvin, A. Fuentes, *Gear Geometry and Applied Theory*, Cambridge University Press, (2004).
- [11] L. Vedmar, A. Andersson, *A method to determine dynamic loads on spur gear teeth and on bearings*, Journal of Sound and Vibration 267(5) (2003), 1065–1084.
- [12] P. Lynwander, *Gear Drive Systems: design and application*, Marcel Dekker Inc. (1983).