

# Análisis de las oscilaciones residuales en movimientos de distribución de sistemas pendulares de transporte

**J. López López, M. Artés Gómez**

*Departamento de Mecánica. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) C/ Juan del Rosal, 12. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid, España.*  
jlopez@ind.uned.es

---

*En los sistemas pendulares de transporte de material se producen oscilaciones de la carga por las inercias que actúan sobre el sistema. Estas oscilaciones son indeseables en la medida en que una amplitud excesiva puede poner en peligro la integridad de los operarios o de las instalaciones, o al menos dificultar las tareas de recepción de la carga. Este trabajo se centra en las vibraciones residuales a que queda sometida la carga en el punto de recepción. A partir de la implementación numérica de la solución teórica, se propone un modelo basado en técnicas de ajuste que permite estimar la amplitud máxima de la oscilación a que quedará sometida la carga en función de la distancia recorrida, y, en el caso de que ésta fuera inadmisibles, recalcular fácilmente el punto de recepción o actuar sobre la velocidad de operación o la longitud del cable para obtener una vibración residual nula.*

---

## 1. INTRODUCCIÓN

En los sistemas pendulares de transporte de material como los utilizados en grúas torre o aporticadas se producen oscilaciones de la carga debidas, entre otras causas, a las inercias que actúan cuando se producen los movimientos inherentes al transporte desde el punto de partida al de recepción. Estas oscilaciones son indeseables, no solamente desde el punto de vista mecánico debido a las posibles resonancias que pudieran causar con la estructura soporte, sino también desde el punto de vista de la seguridad de los operarios que intervienen durante el proceso. Son numerosos los trabajos en los campos de la dinámica y del control en los que se estudia la posibilidad de reducir o eliminar estas vibraciones. Particularmente, los esfuerzos son notables en lo que se refiere a la forma que adquiere el perfil de velocidad del carro debido a las fuerzas que actúan sobre él. Con esta base se han desarrollado algoritmos de control que minimizan las vibraciones controlando los tiempos de aceleración y parada en función del periodo natural de oscilación del sistema pendular. Como marco de referencia, cabe destacar el trabajo de Abdel-Rahman et al [1], en el que se presenta una compilación sobre los principales artículos en el campo de la dinámica y el control de grúas, proporcionando la formulación en que se basan los modelos más habituales de este tipo de sistemas. Adentrándonos en el terreno de lo particular, Omar [2] se centra en el diseño de controladores para evitar las oscilaciones de la carga durante y después del transporte, basándose para uno de los modelos en la realización del movimiento para un solo periodo de la oscilación, siendo destacable el hecho de que incluye el efecto del rozamiento en el modelo. Garrido [3], para eliminar las oscilaciones residuales propone utilizar una secuencia de impulsos de entrada al sistema en base a los semiperiodos de la oscilación y de la longitud del cable del que pende la carga. En otro trabajo, Singhose [4] analiza el efecto que tiene el movimiento de izado de la carga en las oscilaciones teniendo en cuenta la elasticidad del cable. Sin embargo, la utilización de grúas automatizadas se encuentra restringida normalmente a aquellos casos en los que la secuencia de movimientos goza de cierta reproducibilidad, operándose la grúa manualmente en la mayoría de aplicaciones para maximizar la flexibilidad durante el proceso de transporte de la carga. El manejo manual de la grúa en base a la experiencia e intuición del operador no está exento de posibles errores que pueden hacer que la oscilación residual durante el trayecto o en la recepción tenga una amplitud significativa. En este trabajo se analiza la importancia de

estas vibraciones residuales presentando una ecuación que permite estimar la máxima amplitud de la oscilación residual de forma directa, y, en el caso de que ésta fuera inadmisibles, recalcularse fácilmente el punto de recepción con una vibración residual nula.

## 2. METODOLOGÍA

Es común encontrar en la bibliografía especializada el movimiento de distribución de una grúa expresado en función de la posición que ocupa el carro o el pórtico en su movimiento lineal y el ángulo que forma la carga transportada con el mismo. En la formulación aquí presentada no se tiene en cuenta el rozamiento ni las elasticidades del cable o de la estructura de la grúa. Bajo este esquema el movimiento se origina en el carro con una masa  $M$  por la acción de una fuerza  $F$  que actúa desplazándolo una cierta distancia  $x$ . Debido a las inercias que actúan en el sistema se dará origen al movimiento pendular de la carga con masa  $m$  y con una longitud de cable  $L$ , que para un instante determinado formará un ángulo  $\theta$  con la vertical del carro. Las ecuaciones diferenciales que rigen este modelo realizando la aproximación de ángulos pequeños vienen dadas por [2]:

$$\begin{aligned}(M + m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} &= F \\ \ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

La solución óptima en el tiempo de la trayectoria para minimizar las oscilaciones residuales es un perfil rectangular de aceleraciones como el representado en la figura 1. Según este esquema, el carro sufre un impulso inicial hasta alcanzar la velocidad de operación, velocidad que se mantiene constante durante el transporte de la carga. Una vez alcanzado el punto de recepción se aplica un impulso de parada de idénticas características al de arranque pero de sentido contrario. En el presente trabajo este perfil cinemático simétrico es el analizado, estudiando la oscilación máxima a que queda sometida la carga con posterioridad a la parada del carro, esto es, para tiempos mayores de  $t_{dr}$ . La solución  $\theta(t)$  de las ecuaciones diferenciales dadas por (1) para el sistema de aceleraciones planteado es

$$\theta(t) = \theta_p(t)u_0(t - t_{ai}) - \theta_p(t)u_0(t - t_{af}) - \theta_p(t)u_0(t - t_{di}) + \theta_p(t)u_0(t - t_{df})\quad (2)$$

Donde  $u_0$  es la función de escalón unitario y

$$\theta_p(t) = \frac{F_0}{g(M + m)} \cos\left(\frac{\sqrt{gLM(M + m)}}{LM}t\right) - \frac{F_0}{g(M + m)}\quad (3)$$

El presente estudio se centra en las oscilaciones de la carga suponiendo que el sistema de transporte se ve débilmente afectado por éstas, lo que es equivalente a hacer  $M \gg m$  en la ecuación (3). Esto será más cierto para grúas tipo pórtico de elevada rigidez o para grúas torre con sistemas antivibraciones del carro de transporte. Por otro lado, si tenemos en cuenta que el impulso comunicado viene dado por

$$\int_{t_i}^{t_f} F_0 dt = Mv_f - Mv_i\quad (4)$$

y dado que el movimiento parte del reposo ( $v_i = 0$ ) y que la velocidad que alcanza tras el impulso es la velocidad de operación ( $v_f = v$ ) podremos expresar finalmente la oscilación residual de la carga como

$$\begin{aligned}
\theta(t) = & \left[ \frac{v}{g} \frac{1}{t_{af} - t_{ai}} \cos \left( \sqrt{\frac{g}{L}} (t - t_{ai}) \right) - \frac{v}{g} \frac{1}{t_{af} - t_{ai}} \right] - \\
& \left[ \frac{v}{g} \frac{1}{t_{af} - t_{ai}} \cos \left( \sqrt{\frac{g}{L}} (t - t_{af}) \right) - \frac{v}{g} \frac{1}{t_{af} - t_{ai}} \right] - \\
& \left[ \frac{v}{g} \frac{1}{t_{df} - t_{di}} \cos \left( \sqrt{\frac{g}{L}} (t - t_{di}) \right) - \frac{v}{g} \frac{1}{t_{df} - t_{di}} \right] + \\
& \left[ \frac{v}{g} \frac{1}{t_{df} - t_{di}} \cos \left( \sqrt{\frac{g}{L}} (t - t_{df}) \right) - \frac{v}{g} \frac{1}{t_{df} - t_{di}} \right]
\end{aligned} \tag{5}$$

De esta forma, realizando la parada del sistema de transporte a una cierta distancia del inicio del movimiento y tomando la máxima oscilación residual de (5) se obtendrá una curva de forma cicloide de una determinada frecuencia y amplitud, cuyo análisis es objeto del apartado siguiente.

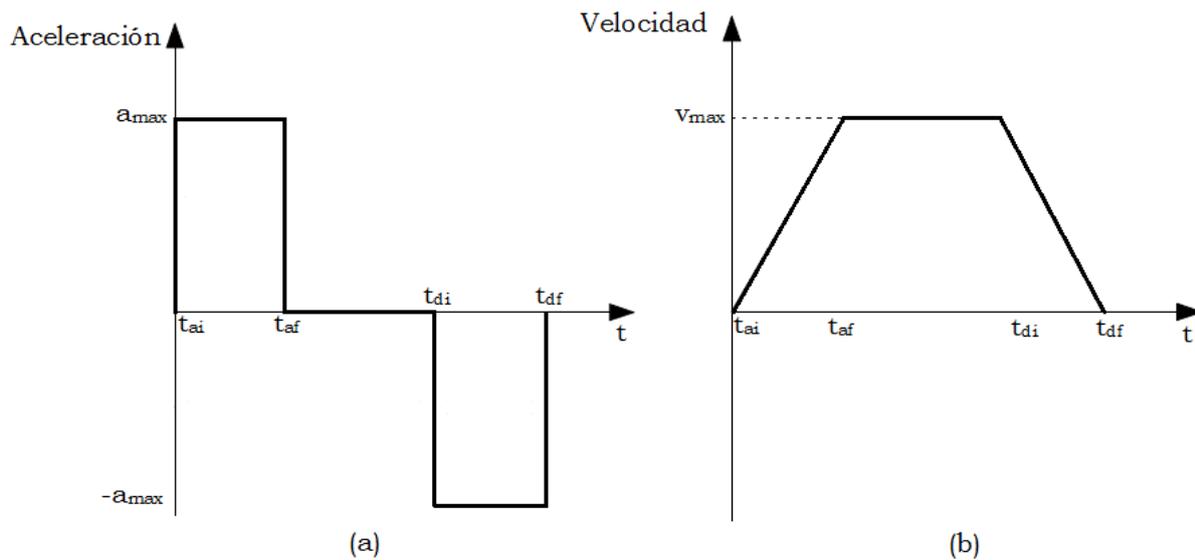


Figura 1. Perfil de aceleraciones y velocidades del sistema de distribución.

### 3. MODELO PROPUESTO PARA EL ANÁLISIS DE LAS OSCILACIONES RESIDUALES

El modelo propuesto objeto del presente trabajo se ha realizado mediante procedimientos de ajuste a partir de los resultados exactos obtenidos mediante implementación en MATLAB del modelo definido por la ecuación (5). El criterio que ha predominado en la elaboración del modelo ha sido el de sencillez. Así, se propone la siguiente aproximación para la modelización de las oscilaciones residuales máximas

$$\hat{\theta}_m = A |\text{sen}(\omega x + \varphi)| \tag{6}$$

(Nótese que la función propuesta no es función del tiempo, sino de la distancia  $x$  entre el inicio y el fin del movimiento de transporte).

### 3.1. Frecuencia, $\omega$

Para determinar la frecuencia de ocurrencia de los puntos de parada óptimos y pésimos de la oscilación residual se han realizado diversas simulaciones variando la longitud del cable del sistema pendular obteniendo en cada caso la frecuencia de la forma de onda obtenida mediante análisis de Fourier. Cada uno de estos puntos están representados en la figura 2a mediante rombos y es lo que se denomina como solución exacta. A partir de estos datos se han realizado procedimientos de ajuste tomando como base principalmente en tres modelos,

Potencial	Exponencial	Racional
$\omega = \frac{\pi}{2v\sqrt{L}}$	$\omega = \frac{\pi}{v} \left( \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3}L} + \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{22}L} \right)$	$\omega = \frac{\pi}{v} \left( \frac{\frac{1}{13}L + 1}{L + \frac{9}{8}} \right)$

Tal y como se desprende del análisis de los residuos de cada uno de estos modelos representado en la figura 2b, el de tipo potencial no sólo es el que se presenta como el más simple, sino que además es en general el que mejor se ajusta, especialmente, para longitudes de cable bajas y altas.

### 3.2. Amplitud, $A$

Para determinar la función que mejor ajusta a cambios en la amplitud se ha realizado el mismo procedimiento que en caso de la frecuencia, utilizando en este caso los siguientes modelos de ajuste

Potencial	Exponencial	Racional
$\omega = v \frac{1}{2} L^{-\frac{2}{5}}$	$\omega = v \left( \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{2}L} + \frac{3}{10} e^{-\frac{1}{25}L} \right)$	$\omega = v \left( \frac{\frac{1}{10}L + \frac{3}{2}}{L + \frac{12}{5}} \right)$

Como se puede observar del análisis de los residuos de la figura 3b, la función potencial propuesta es la que mejor se ajusta para las bajas y medias longitudes del cable consideradas, siendo el ajuste exponencial el que produce mejores resultados para las mayores longitudes del cable. No obstante, de nuevo, atendiendo a criterios de simplicidad es la función potencial la escogida para el modelo. Para tener en cuenta los cambios en amplitud debidos a las variaciones en los intervalos de tiempo en que se aplican los impulsos de arranque y parada es necesario multiplicar esta función de amplitud por el factor

$$\frac{1}{\Delta t \frac{\Delta t}{T_n}} = \frac{1}{\Delta t \frac{\Delta t \sqrt{g}}{2\pi\sqrt{L}}} \tag{7}$$

de tal manera que se tenga en cuenta la relación entre el intervalo de tiempo que dura el impulso y el intervalo de tiempo correspondiente al periodo natural de la oscilación pendular.

### 3.3. Fase, $\varphi$

La fase para el modelo propuesto se presenta constante siempre y cuando se mantenga la simetría del perfil de aceleraciones, que es una de las premisas de este trabajo. Para el caso que nos atañe el valor de la fase es de -0,1.

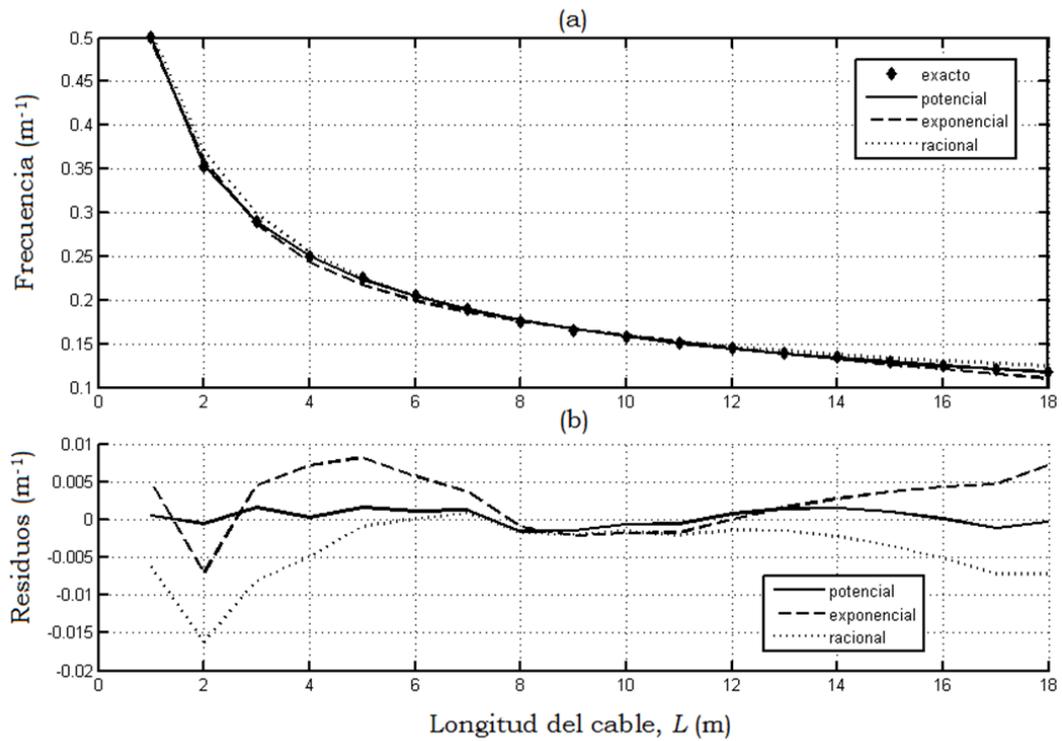


Figura 2. Procedimiento de ajuste a la solución teórica para la frecuencia de ocurrencia de los puntos óptimos y pésimos de parada.

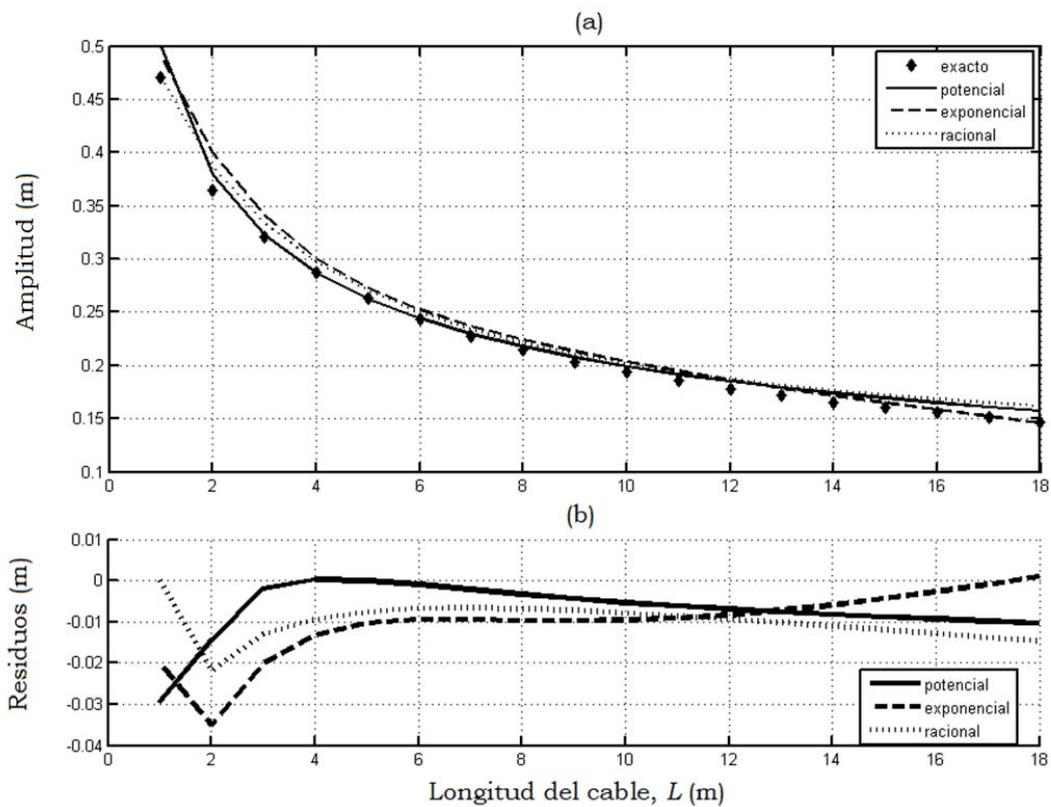


Figura 3. Procedimiento de ajuste a la solución teórica para la amplitud máxima de la oscilación residual.

### 3.4. Modelo propuesto

Según lo visto, el modelo propuesto para calcular la amplitud máxima residual a que queda sometida la carga en un movimiento de distribución de un sistema de transporte pendular de material es

$$\hat{\theta}_m = \frac{1}{\Delta t \frac{\Delta t}{2\pi\sqrt{L}} \frac{g}{L}} v \frac{1}{2} L^{-\frac{2}{5}} \left| \sin \left( \frac{\pi}{2v\sqrt{L}} x - 0.1 \right) \right| \quad (8)$$

De esta forma, únicamente a partir de la longitud del cable ( $L$ ), del incremento de tiempo en el que se producen los impulsos de arranque y parada ( $\Delta t$ ) y de la velocidad de operación de la grúa ( $v$ ) se puede estimar la amplitud máxima a que quedará sometida la carga al trasladarla una cierta distancia  $x$  entre los puntos de recogida y entrega de material.

## 4. RESULTADOS

En este apartado se presentan los resultados obtenidos con el modelo comparándolos con la solución numérica presentada en el apartado de metodología, que es la que se ha denominado como exacta.

En la figura 4 se presenta en continuo-gris la solución exacta de la máxima amplitud de la oscilación residual variando la longitud del cable, concretamente, para valores de 4, 8, 12 y 16 m. El resto de parámetros en este análisis permanecen constantes con un valor para la velocidad de operación de 1 m/s y un impulso de aceleración y deceleración de 1 s. La solución obtenida por el modelo propuesto corresponde a la línea punteada-negra. Como se puede observar el modelo ajusta especialmente bien para los valores medios y bajos de las longitudes del cable consideradas, incrementándose el error obtenido en el punto pésimo de parada a medida que se incrementa la longitud, como era de esperar según el análisis de los residuos de la figura 3b. No obstante, el error cometido para el peor caso analizado ( $L=16$  m) es del 6%. De esta misma figura 4.1 también se desprende que el modelo responde bien a cambios en la frecuencia de ocurrencia de los puntos óptimos de parada para todo el rango de longitudes de cable analizado.

En la figura 5 se estudia el comportamiento del modelo cuando varía la velocidad de operación de la grúa. Para el análisis se han tomado las dos velocidades de operación más habituales, 0.5 m/s y 1 m/s. Para cada una de estas velocidades se han estudiado los casos correspondientes a la mínima y máxima longitud del cable del análisis anterior (4m y 16 m). Con respecto a la frecuencia se observa que de nuevo el modelo responde bien a los cambios introducidos. Para la amplitud, se puede ver como el ajuste es prácticamente exacto para bajas longitudes del cable independientemente de la velocidad de operación, aumentando el error para altos valores de la longitud del cable. Este error, para el caso de una velocidad de operación de 0.5 m/s, sigue manteniéndose en torno al 6%, por lo que es más que probable que sea únicamente debido a la función potencial de ajuste de amplitud del apartado 3.2.

En el último de los casos analizados, el representado en la figura 6, se analiza el comportamiento del modelo cuando solamente se varía la duración de los impulsos de arranque y parada. Para los análisis realizados en este caso la longitud del cable se ha mantenido constante en 4 m y la velocidad de operación en 1 m/s. Posteriormente se ha procedido a realizar los análisis con impulsos de 0.5 s, 1 s y 2 s. Como se puede observar, el término premultiplicativo a la amplitud obtenida por procedimiento de ajuste responde efectivamente a los cambios introducidos en la relación entre la duración del impulso y el periodo natural de la oscilación pendular.

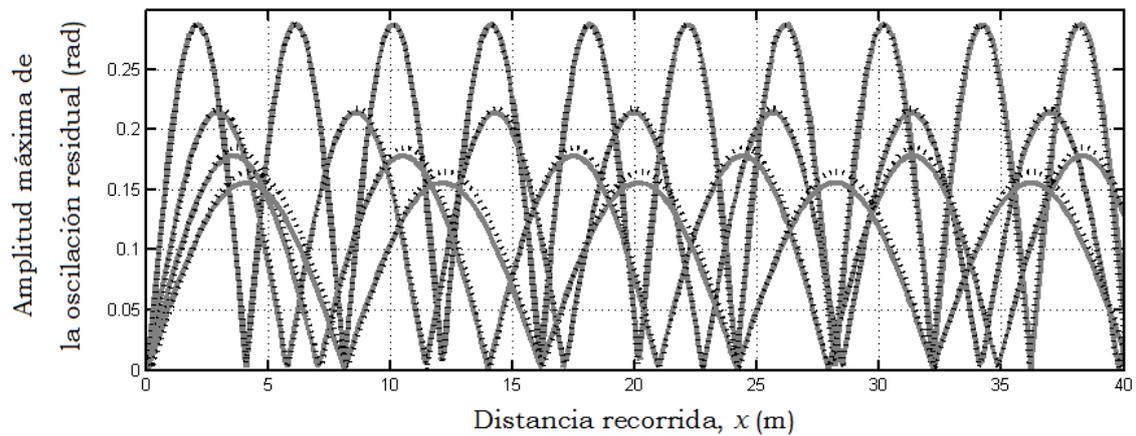


Figura 4. Resultados. Análisis del modelo en función de la longitud del cable ( $L = 4, 8, 12, 16$  m) ( $v = 1$  m/s,  $\Delta t = 1$  s).

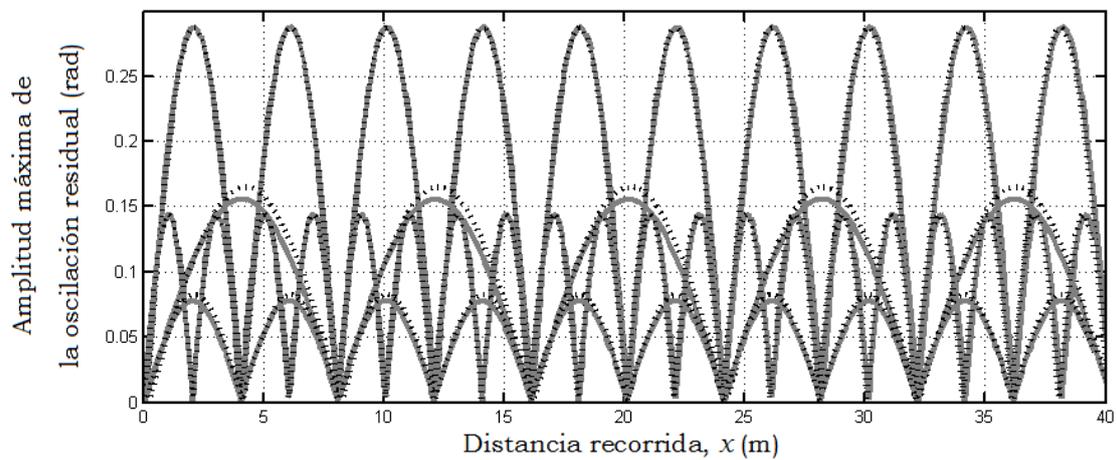


Figura 5. Resultados. Análisis del modelo en función de la velocidad de operación ( $v = 0.5$  m/s,  $v = 1$  m/s) y de la longitud del cable ( $L = 4$  m,  $L = 16$  m) ( $\Delta t = 1$  s).

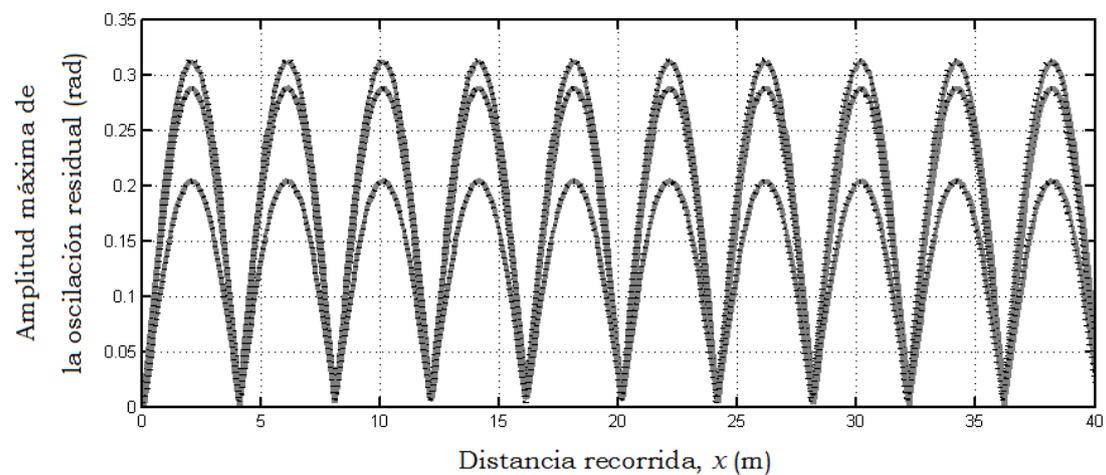


Figura 6. Resultados. Análisis del modelo en función de la duración de los impulsos de arranque y parada ( $\Delta t = 0.5$  s,  $\Delta t = 1$  s,  $\Delta t = 2$  s) ( $v = 1$  m/s) ( $L = 4$  m).

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se han analizado las oscilaciones residuales a que queda sometida la carga en movimientos de distribución de sistemas pendulares de transporte de material. A partir de las ecuaciones diferenciales del modelo se ha obtenido la expresión que determina la posición de la carga una vez ésta ha llegado al punto de recepción, tomando como trayectoria aquella que es óptima en el tiempo, que viene determinada por un perfil simétrico de aceleraciones con impulsos rectangulares de arranque y parada. A partir de la implementación de esta solución teórica, se ha propuesto un modelo basado en técnicas de ajuste que permite calcular la amplitud máxima de la oscilación a que quedará sometida la carga en función de la distancia entre los puntos de recogida y entrega de la carga. Se han analizado modelos basados en funciones potenciales, exponenciales y racionales, de los que se propone utilizar, tanto para la amplitud máxima de la oscilación residual como para la frecuencia de ocurrencia de los puntos óptimos y pésimos de parada de la carga, funciones potenciales, atendiendo a criterios de exactitud y simplicidad. El modelo propuesto tiene como variables únicamente la velocidad de operación del movimiento de distribución, la longitud del cable que sustenta la carga y la duración de los impulsos de arranque y parada del movimiento. Los análisis comparativos con la solución exacta demuestran que los mayores errores para la amplitud residual máxima son del 6%, únicamente para longitudes de cable iguales o mayores a los 15 m. Mediante este modelo el operario no sólo puede estimar de forma sencilla cuales son las distancias óptimas entre los puntos de recepción y entrega de la carga desde el punto de vista de que se minimicen las oscilaciones residuales, sino además estimar el valor máximo de la oscilación en el caso de que no se pudiera variar dicha distancia, con el objeto de determinar si entraña algún peligro para la seguridad de la operación.

## 6. REFERENCIAS

- [1] E. M. Abdel-Rahman *et al.* Dynamics and control of cranes: A Review, *Journal of Vibration and Control*, 9 (2003), 863-908.
- [2] H. M. Omar. Control of Gantry and Tower Cranes, Doctoral Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2003.
- [3] S. Garrido, M. Abderrahim, A. Giménez, R. Diez, and C. Balaguer. Anti-Swinging Input Shaping Control of an Automatic Construction Crane, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 5 (2008), 549-557.
- [4] W. Singhose, L. Porter, M. Kenison, E. Kriikku. Effects of hoisting on the input shaping control of gantry cranes, *Control Engineering Practice*, 8, 10 (2000), 1159-1165.