

Modelado numérico y analítico de contactos lineales termoelastohidrodinámicos con lubricantes no-Newtonianos

E. Chacón Tanarro, E. de la Guerra Ochoa, P. Lafont Morgado, J. Echávarri Otero, J.M. Muñoz-Guijosa, A. Díaz Lantada, J.L. Muñoz Sanz, D. Fernández Caballero, V. Rodríguez de la Cruz

*División de Ingeniería de Máquinas. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica de Madrid
e.chacon@upm.es*

Este artículo presenta dos procedimientos para la resolución del problema de los contactos termoelastohidrodinámicos lineales: mediante un modelo numérico y empleando expresiones analíticas validadas. A parte de incluir los fenómenos térmicos originados por la fricción viscosa del lubricante, se ha tenido en cuenta la posible aparición de comportamientos no-Newtonianos originados por las condiciones de funcionamiento a las que se encuentra solicitado el lubricante en este tipo de contactos. Finalmente se establece una breve comparativa entre ambos métodos, comparando los valores obtenidos para uno de los parámetros calculados, en este caso el espesor de película. De los resultados se concluye la necesidad de contrastar con valores experimentales para realizar una validación más precisa.

1. INTRODUCCIÓN

Los contactos tribológicos en régimen de lubricación termoelastohidrodinámica (TEHD) están gobernados por fenómenos complejos. Su resolución presenta grandes dificultades y en la mayor parte de las situaciones, su modelado requiere de la resolución numérica de un sistema de ecuaciones no lineal o de la realización de simplificaciones que conduzcan a resultados analíticos aproximados [1,2].

En un estudio exhaustivo del problema se debe de tener en cuenta que muchos lubricantes dejan de comportarse como fluidos newtonianos y presentan comportamientos pseudoplásticos [3] bajo condiciones de operación severas, propias de la EHL. Otro fenómeno que aparece bajo este tipo de condiciones, consiste en el incremento de la temperatura del lubricante a consecuencia de la fricción viscosa originada entre sus capas [4-6]. La suma de ambos fenómenos conduce, entre otras cosas, a que el valor de su viscosidad efectiva sea mucho menor que el supuesto bajo condiciones newtonianas e isotermas, afectando a otros parámetros fundamentales del contacto.

La finalidad de este artículo consiste en plantear dos métodos de cálculo sencillos y aproximados para el problema TEHD lineal que permitan la resolución de sus principales parámetros característicos, como pueden ser: presiones, temperaturas, espesor de película, coeficiente de fricción,... para poder ser posteriormente aplicados al diseño y optimización de contactos lubricados EHD industriales.

2. FLUIDOS PSEUDOPLÁSTICOS. MODELO DE CARREAU.

La mayoría de los lubricantes no-Newtonianos, comúnmente empleados en la industria, se comportan como fluidos Newtonianos cuando son sometidos a bajas velocidades de cizalla, $\dot{\gamma}$, y sufren una disminución de su viscosidad dinámica, η , al aumentar $\dot{\gamma}$ a partir de un determinado valor, lo que se corresponde con comportamiento pseudoplástico [6]. Esta evolución depende del tipo de lubricante y de la presión y temperatura que alcance bajo las condiciones de funcionamiento [7].

Uno de los modelos comúnmente empleados por otros autores para caracterizar este fenómeno es el modelo de Carreau [8]:

$$\eta = \mu \left[1 + \left(\frac{\mu \dot{\gamma}}{G} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} \quad (1)$$

donde μ es la viscosidad del lubricante para bajos $\dot{\gamma}$, G es el módulo a cortante del lubricante y n es un exponente de la ley potencial. Los parámetros n y G son los que controlan el comportamiento no-Newtoniano del lubricante. Tal y como puede observarse en la figura 1, G determina el punto de transición entre la zona Newtoniana y no-Newtoniana y n la variación de la viscosidad con $\dot{\gamma}$ en la zona no-Newtoniana.

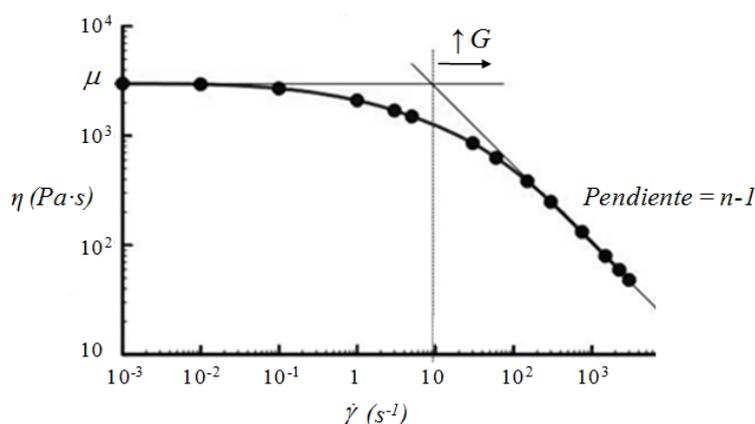


Figura 1. Modelo de Carreau

La viscosidad μ de los lubricantes suele ajustarse adecuadamente al modelo exponencial de Barus [9]:

$$\mu = \mu_0 \exp(\alpha p) \quad (2)$$

Donde μ_0 es la viscosidad a presión atmosférica y temperatura de referencia T_0 y α es el coeficiente viscosidad-presión.

3. ESPESOR DE PELÍCULA EN CONTACTOS LINEALES

Grubin [4] fue el primero en plantear el cálculo del espesor central de película sin resolver de forma simultánea las dos ecuaciones implicadas en el problema elastohidrodinámico: la ecuación de Reynolds y la deformación elástica de los sólidos en contacto. Para ello realizó la simplificación de que el espesor de la película lubricada, $h(x)$, siendo x la dirección de flujo, puede aproximarse como la suma de la deformación elástica del contacto Hertziano y una separación adicional debida a la presencia del lubricante, h_0 [10]:

$$h(x) = h_0 + \frac{4RW}{\pi} \left\{ \bar{x}(\bar{x}^2 - 1)^{1/2} - \ln[\bar{x} + (\bar{x}^2 - 1)^{1/2}] \right\} \quad (3)$$

Donde $\bar{x} = x/b$, siendo b la semianchura de la huella de contacto hertziano, $b = 4p_0 R/E'$, $R = 1/(1/R_1 + 1/R_2)$ el radio equivalente y $E' = 2/[(1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2]$ el módulo reducido de Young. El valor de la carga por unidad de longitud adimensional, W , se calcula según la expresión:

$$W = \frac{32}{\pi} \left(\frac{\bar{p}}{E'} \right)^2 \quad (4)$$

donde \bar{p} representa el valor medio de la distribución de presión.

Grubin realizó una segunda suposición para facilitar la resolución del problema. Dado que la presión que se alcanza a la entrada del contacto hertziano ($\bar{x} = -1$) es lo suficientemente elevada, la componente del Poiseuille en el flujo de lubricante es despreciable. Teniendo en cuenta lo anterior, y suponiendo que la viscosidad μ del lubricante tiene un comportamiento según (2), se deduce que la presión a la entrada del contacto hertziano ($\bar{x} = -1$) tiene que cumplir que [11]:

$$p(\bar{x} = -1) = \frac{4}{\alpha} \quad (5)$$

4. ECUACIÓN DEL CAUDAL Y DE REYNOLDS-CARREAU

4.1. Planteamiento

Considerando un flujo incompresible bidimensional [12] entre dos superficies en movimiento, de velocidades lineales u_1 y u_2 en dirección x , con un espesor de lubricante mucho menor que la longitud del contacto y comportamiento no-Newtoniano del fluido ajustado según el modelo de Carreau (2), el caudal por unidad de ancho del fluido, Q , puede calcularse con la siguiente expresión [13]:

$$Q = \frac{\bar{u}h_0}{\mu Gh^2} = u_1 h - \frac{nG^{n-1/n} \left(G^2 + \left(\tau_m - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1+n}{2n}} h}{(1+n)\mu \frac{\partial p}{\partial x}} \quad (6)$$

$$+ \frac{nG^2 \left(\tau_m + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} \right)}{(1+n)\mu \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2} \text{hypergeom} \left(\left[\frac{1}{2}, -\frac{1+n}{2n} \right], \left[\frac{3}{2} \right], -\frac{\left(\tau_m + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} \right)^2}{G^2} \right)$$

$$- \frac{nG^2 \left(\tau_m - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} \right)}{(1+n)\mu \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2} \text{hypergeom} \left(\left[\frac{1}{2}, -\frac{1+n}{2n} \right], \left[\frac{3}{2} \right], -\frac{\left(\tau_m - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} \right)^2}{G^2} \right)$$

donde $\bar{u} = (u_1 + u_2)/2$ es la velocidad media del fluido y τ_m es la tensión cortante del fluido en el plano medio del espesor de la película. Para unas condiciones de funcionamiento determinadas, y unas distribuciones de $\tau_m(x)$ y $h(x)$ conocidas, es posible obtener una distribución del gradiente de presiones, $\partial p(x)/\partial x$ de la expresión (6). Conocido este gradiente, la distribución de presiones es conocida realizando una integración numérica a partir de las condiciones de contorno para la presión. Se ha considerado que para un punto lo suficientemente alejado de la zona de contacto ($\bar{x} \approx -7$) [10] la presión es nula, y en el punto de entrada a la zona de contacto ($\bar{x} = -1$), la presión tiene que cumplir la condición (5).

A partir de la distribución de presión a lo largo del contacto lineal es posible obtener la distribución de τ_m a partir de la ecuación Reynolds-Carreau desarrollada en [6], y que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
& \frac{(u_2 - u_1)\mu \frac{\partial p}{\partial x}(1+n)}{nG^{1-1/n}} \\
& = \left(G^2 + \tau_m^2 + \tau_m \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{4} \left(h \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1+n}{2n}} \\
& - \left(G^2 + \tau_m^2 - \tau_m \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{4} \left(h \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1+n}{2n}}
\end{aligned} \tag{7}$$

4.2. Proceso de resolución

Para calcular las distribuciones de presión y espesor de película en un contacto lineal EHD a partir de las expresiones (6) y (7) es necesario realizar un proceso iterativo partiendo de unas aproximaciones iniciales. El cálculo comienza suponiendo un valor en la separación h_0 y una distribución de presión a la entrada del contacto.

La ecuación (7) se itera por Newton-Raphson [11] hasta obtener la distribución $\tau_m(x)$ para unos valores de h_0 y distribución de p inicialmente supuestos. Sustituyendo h_0 , y el valor recién calculado de τ_m , se calcula una nueva distribución de presión, p' , aplicando un nuevo proceso iterativo por Newton-Raphson a la expresión (6) para obtener $\partial p'/\partial x$. Al finalizar cada proceso iterativo de la distribución de presión, se realiza la comprobación de la condición (5) y se ajusta el valor de la separación h_0 . Este método se repite hasta lograr la convergencia a la solución final empleando la siguiente comprobación:

$$\begin{cases} p'(\bar{x} \approx -1) < 4/\alpha \rightarrow h_0 = h_0 - \Delta h_0 \\ p'(\bar{x} \approx -1) > 4/\alpha \rightarrow h_0 = h_0 + \Delta h_0 \\ p'(\bar{x} \approx -1) = 4/\alpha \rightarrow p' \text{ es solución} \end{cases} \tag{8}$$

Cuando el valor de $p'(\bar{x} \approx -1)$ es inferior a $4/\alpha$ la distribución h supuesta es mayor que la h solución, y por tanto hay que disminuir el valor de h_0 . Cuando sucede al contrario, se debe incrementar el valor de la constante h_0 . Si $p'(\bar{x} \approx -1) = 4/\alpha$ se ha logrado cumplir la condición (5) y las expresiones (6) y (7), y por lo tanto, se ha alcanzado la distribución p solución. Con el último valor de h_0 calculado se conoce la distribución h solución sustituyendo en la expresión (3).

5. ECUACIÓN DE LA ENERGÍA

La ecuación bidimensional y estacionaria de la energía, despreciando la convección a través de la película de lubricante, se representa como [14]:

$$k_f \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\tau \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) - \beta_f \theta u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_f C_{pf} u \frac{\partial T}{\partial x} \tag{9}$$

Donde ρ_f , k_f , β_f y C_{pf} son la densidad, la conductividad, el coeficiente de expansión térmica y el calor específico del lubricante respectivamente y T representa la temperatura.

En los cuerpos sólidos la ecuación de la energía quedaría como:

$$\frac{\rho_s C_{ps}}{k_s} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{10}$$

Conocidas las distribuciones de velocidad, u , y de presión, p , se puede obtener la distribución de temperatura en el lubricante y en las superficies de los sólidos. Para ello se plantea un sistema discretizado de las ecuaciones (9) y (10), se imponen unas condiciones frontera y se resuelve por métodos directos. Las condiciones frontera adoptadas son: la

temperatura de entrada y lateral de los sólidos y el lubricante es constante e igual a T_0 , y la temperatura interior de los sólidos es igual a T_0 .

6. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA TEHD LINEAL MEDIANTE UN MODELO ANALÍTICO

Una vez planteado el método de resolución numérica del problema TEHD lineal, se explica un método analítico más sencillo para realizar una comparación de resultados.

Suponiendo que la distribución de presión en el contacto EHL lineal se aproxima a la hertziana [15], Hamrock [16] planteo la siguiente expresión para el cálculo del espesor central de película en contactos EHD lineales con fluidos compresibles y Newtonianos, h_{cN} :

$$h_{cN} = 2.154\alpha^{0.47}(\mu_0\bar{u})^{0.692}E'^{0.11}R^{0.308}p_0^{-0.332} \quad (11)$$

Para el cálculo del espesor central de película con fluidos no-Newtonianos, Bair [17] propuso el siguiente factor corrector para la expresión Newtoniana (11):

$$h = \frac{h_{cN}}{\left\{1 + 0.79 \left[\left(1 + \frac{SRR}{100}\right) \frac{\bar{u}\mu_0}{h_{cN}G} \right]^{\frac{1}{1+0.002 \cdot SRR}} \right\}^{3.6(1-n)^{1.7}}} \quad (12)$$

Para el cálculo de los parámetros reológicos del lubricantes, μ_0 y α , es necesario conocer la temperatura media del lubricante, T , en el contacto a través de la suma de temperaturas siguiente:

$$T = T_f + \Delta T_l + T_e \quad (13)$$

Donde T_f es la temperatura de flash media de las dos superficies, ΔT_l es el incremento de la temperatura por el calor generado en el seno del fluido y T_e la temperatura de entrada del fluido.

La temperatura flash se define como el incremento de temperatura que sufre la superficie de los sólidos en el contacto [18]. Partiendo de las leyes de conservación de la energía y de la transmisión del calor, Archad [19] planteó un método analítico para el cálculo de T_f en cada superficie. Las expresiones obtenidas para el flash térmico varían en función del número adimensional de Peclet (P_E), que define la transferencia de calor hacia el interior de los sólidos en contacto [20], según sus propiedades térmicas y el régimen de velocidad en el que la fuente de calor se desplaza sobre la superficie.

$$P_E = ub/\chi \quad (14)$$

siendo u la velocidad de cada superficie y χ la difusividad térmica del sólido. En la expresión analítica desarrollada por Archard se distinguen tres rangos diferentes según el valor del número de Peclet, los cuales se muestran en la tabla 1.

Peclet	Penetración del calor en el sólido / Situación considerada	Temperatura flash
$P_E < 0.1$	Alta / Conducción estacionaria	$T_f = 0.318 \frac{fW u_1 - u_2 }{k} \left(\frac{\chi_i}{\bar{u}b} \right) (-2.303P_E \log_{10}(2P_E) + 1.616P_E)$
$0.1 < P_E < 5$	Media / Fuente de calor en movimiento lento	$T_f = 0.159 \cdot C_3 \cdot \frac{fW u_1 - u_2 }{k} \left(\frac{\chi_i}{\bar{u}b} \right)$
$P_E > 5$	Baja / Fuente de calor	$T_f = 0.266 \cdot C_3 \cdot \frac{fW u_1 - u_2 }{k} \left(\frac{\chi_i}{\bar{u}b} \right)^{0.5}$

Tabla 1. Temperatura flash

Donde el coeficiente de fricción, f , se calcula aproximando la distribución de presiones a la de Hertz y tomando espesor de película constante e igual a h_c (12):

$$\mu = \frac{2\mu_0 \frac{u_1 - u_2}{h_c} \int_0^b e^{\alpha p_0 \sqrt{1-\bar{x}^2}}}{W} \quad (15)$$

El cálculo de las temperaturas ΔT_l y T_e de (13) se realiza igual que en [21].

7. RESULTADOS

Por último, se han calculado unos resultados numéricos y analíticos según lo modelos planteados en este artículo, bajo las condiciones de funcionamiento recogidas en la tabla 2. El objetivo consiste en establecer una breve comparativa entre ambos métodos. El parámetro que se ha seleccionado para realizar este estudio ha sido el espesor central de película, valor de gran importancia industrial, ya que identifica la correcta lubricación de los contactos.

Parámetro	Valor
R	0.02 m
p_m/p_0	$0,8 / 1.5 \cdot 0,8 \text{ GPa}$
E'	211 GPa
SRR [21]	$0 - 25 \%$
μ_0	$0.08 \text{ Pa}\cdot\text{s}$
α	15 GPa^{-1}
n	$0.3, 0.5, 0.75$
G	$1e6, 2e6, 5e6, 7e6$

Tabla 2. Condiciones de funcionamiento y propiedades reológicas del lubricante

Para los cálculos numéricos se ha empleado una malla no uniforme de 45 puntos situados desde la zona de entrada ($\bar{x} = -1$) hasta un punto suficientemente alejado y de presión nula ($\bar{x} = 7$), con un espaciado que varía desde $\Delta x/b = 0.001$ para $\bar{x} = -1$ hasta $\Delta x/b = 0.3$ para $\bar{x} = 7$. Se ha realizado una comprobación que a partir de 45 puntos de malla la solución final no sufre apenas modificaciones.

Los resultados de espesor de película obtenidos por ambos métodos, para las condiciones de la tabla 2, se reflejan en la figura 2.

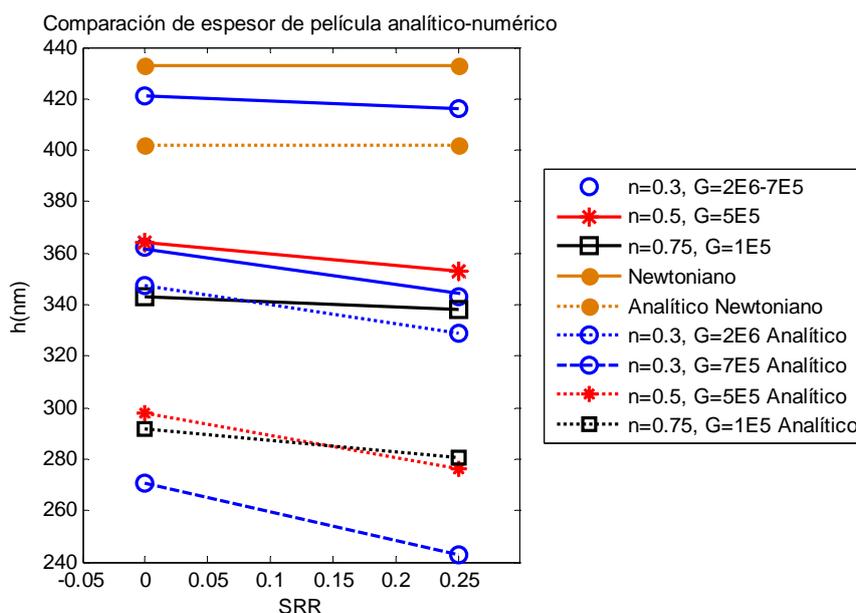


Figura 2. Resultados numéricos y analíticos del espesor de película

8. CONCLUSIONES

De la figura 2 se extraen una serie de conclusiones sobre los dos modelos desarrollados en este artículo. En primer lugar, los resultados de h obtenidos mediante el modelo numérico son mayores que los del analítico, y en segundo, el decrecimiento de h , por efectos no-Newtonianos y térmicos, parece seguir una misma evolución en ambos modelos. Sin embargo, y a consecuencia de las visibles diferencias entre los resultados, se hace necesaria la comprobación experimental para realizar una valoración más firme y precisa de uno y otro modelo. De los resultados obtenidos se espera una mayor proximidad al comportamiento del modelo numérico que al modelo analítico.

9. REFERENCIAS

- [1] S. Bair. *High pressure rheology for quantitative elastohydrodynamics*. ELSEVIER. Tribology and interface engineering series, no 54 (2007).
- [2] P. Kumar, M.M. Khonsari. *On the role of lubricant rheology and piezo-viscous properties in line and point contact EHL*. Tribology International, Vol. 42, (2009), 1522-1530.
- [3] S. Bair, W.O. Winer. *Some observations in high pressure rheology of lubricants*. Trans. ASME, J. Lubr. Technol., 104, (1982), 382-386.
- [4] R. Gohar. *Elastohydrodynamics*. Ellys Horwood Ltd. (1988).
- [5] A. Schmidt, P.W. Gold, C. Abmann, H. Dicke, J. Loos. *Viscosity-pressure-temperature behaviour of mineral and synthetic oils*. Journal of Synthetic Lubrication, 18, (2006), 51-79.
- [6] G.W. Stachowiak, A.W. Batchelor. *Engineering Tribology*, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [7] H. Barnes, J. Hutton, F. K. Walters. *An Introduction to Rheology (Third edition)*, ELSEVIER. Science Publishers B.V., (1993).
- [8] P.J. Carreau. *Rheological equations from molecular network theories*. Trans Soc Rheol (1972),16(1):99-127.
- [9] C. Barus. *Isotherms, isopiestic and isometrics relative to viscosity*. Am. J. Sci. 45 (1893) 87-96.
- [10] S. Bair. *A Reynolds-Ellis equation for line contact with shear-thinning*. Tribology international, 39 (2006), 310-316.
- [11] D. Dowson, G.R. Higginson. *Elastohydrodynamic lubrication*. Pergamon Press, Oxford (1996), 70-71.
- [12] S. Bair, M.M. Khonsari. *Reynolds equations for common generalizad Newtonian models and an approximate Reynolds-Carreau equation*. Proc. IMechE, Part J: J. Engineering Tribology, 220, (2006), 365-374.
- [13] E. de la Guerra. *New Reynolds Equation for Line Contact based on the Carreau model modification by Bair*. Tribology International, (2012).
- [14] P. Kumar, M.M. Khonsari. *Combined Effects of Shear Thinning and Viscous Heating on EHL Characteristics of Rolling-Sliding Line Contacts*. Engineering Tribology, 130, (2008).
- [15] H. Hertz. *On the conyacy of elastic solids*. Journal für die reine unt angewandte Mahematik (1882), 156-171.
- [16] B.J. Hamrock. *Fluid Film Lubrication*. NASA Reference Publication 1255, (1991), 501-511.
- [17] S. Bair. *Shear thinning correction for rolling/sliding elastohydrodynamic film thickness*. Proc. IMechE, Part J: J. Engineering Tribology, 219. (2005), 69-74.
- [18] H. Blok. *Inverse Problems in Hydrodynamic Lubrication and Design Directives for Lubricated Flexible Surfaces*. Proceedings International Symposium on Lubrication and Wear, (1963), 7-79.
- [19] J. Archard. *The Temperature of Rubbing Surfaces*. Wear, Vol. 2 , (1958), 438-455.

-
- [20] G.W. Stachowiak, A.W. Batchelor. *Engineering Tribology*. ELSEVIER Butterworth-Heinemann, 2005.
- [21] J. Echavarrí, *et al.* *Analytical model for predicting the friction coefficient in point contacts with thermal elastohydrodynamic lubrication*. Proc. IMechE Vol. 225 Part J: J. Engineering Tribology, (2010), 181-191.