

# Modelo de elementos finitos para la simulación del sistema pantógrafo-catenaria

M. Tur Valiente<sup>(1)</sup>, L. Baeza González<sup>(1)</sup>, F.J. Fuenmayor Fernández<sup>(1)</sup>, E. García García<sup>(2)</sup>

(1) Dpto. de Ingeniería Mecánica y Materiales. Universidad Politécnica de Valencia  
matuva@mcm.upv.es

(2) Patentes Talgo S.L.

---

*La catenaria ferroviaria es el sistema que se encarga de la transmisión de energía eléctrica al vehículo a través pantógrafo. En este trabajo se presenta un modelo 3D de elementos finitos de la catenaria que sirve para resolver el problema de interacción entre el pantógrafo y la catenaria. El desarrollo de modelos de elementos finitos de sistemas formados por cables que sufren grandes desplazamientos durante el montaje presenta el problema del cálculo de la configuración de equilibrio. En este trabajo se proponen dos métodos que permiten imponer las restricciones que se generan durante el montaje de la catenaria. Se utiliza el esquema HHT para la integración de las ecuaciones que definen el movimiento y un método de penalización para considerar el contacto. Se considera la no linealidad que puede implicar la pérdida de contacto y el comportamiento unilateral de los cables que sólo pueden transmitir cargas de tracción. El modelo se ha utilizado para simular el comportamiento de dos tipos de catenaria.*

---

## 1. INTRODUCCIÓN

La catenaria ferroviaria es el sistema que se encarga de la transmisión de energía eléctrica al vehículo a través del pantógrafo. Está formada por un conjunto de cables, usualmente sustentador, de contacto, péndolas y falso sustentador o péndola en Y, soportados por elementos estructurales como son los postes, las ménsulas y los brazos de registro o atirantado. La captación de energía se realiza a través del pantógrafo que se encarga de garantizar el contacto permanente con el cable de la catenaria.

En el diseño del sistema pantógrafo-catenaria existe un compromiso a la hora de decidir el empuje que ejerce el pantógrafo sobre la catenaria, ya que debe ser lo menor posible para minimizar el desgaste de los elementos en contacto y lo suficientemente elevado para garantizar que siempre existe contacto y no hay cortes en el suministro de energía. Por lo tanto, disponer de herramientas que permitan simular el comportamiento dinámico del sistema es de gran utilidad en el diseño del mismo.

En este trabajo se presenta un modelo 3D de elementos finitos que se utiliza para resolver el problema de interacción dinámica entre el pantógrafo y la catenaria. En los últimos años se han publicado procedimientos para realizar la simulación de este sistema, por ejemplo PCaDA del Politecnico de Milano [1], OSCAR de la SNCF [2], PrOSA de DB [3], SPOPS del KRRRI de Korea [4], o CANDY [5]. A diferencia de los procedimientos publicados, en este trabajo se define un modelo de elementos finitos completamente no lineal, sin realizar la hipótesis de pequeños desplazamientos. Esta consideración es especialmente importante durante la instalación de la catenaria. Se ha desarrollado una metodología que permite encontrar la configuración inicial del modelo de elementos finitos para cumplir las ecuaciones de restricción que se imponen durante el montaje.

En el apartado 2 se realiza una descripción de los elementos de la catenaria considerados en la simulación. El siguiente apartado presenta la formulación de elementos finitos utilizada. A continuación se detalla el procedimiento para determinar la configuración de equilibrio y realizar la integración de las ecuaciones que definen el comportamiento dinámico. Por último se muestran algunos ejemplos de aplicación.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE CATENARIA

En la figura 1 se muestra una catenaria ferroviaria en la que se indican los principales componentes. El cable de contacto es el encargado de proporcionar la energía al tren a través del contacto con el pantógrafo. Para que la transmisión de esfuerzos sea adecuada se debe controlar la altura del cable. Esto se consigue colgando el cable de contacto del cable sustentador a través de unas péndolas de diferente longitud en función de la posición dentro del vano. Este conjunto de cables se unen a los postes a través de la estructura de barras que se denomina ménsula. Las péndolas en Y se añaden para mantener la altura y rigidez del cable de contacto en la zona cercana a los postes. Unido a la ménsula se encuentra el brazo de registro que desplaza el cable de contacto hacia el centro de la vía o hacia fuera de forma alternante generando un trazado en forma de zigzag. Los cables sustentador y de contacto se encuentran sometidos a tensión mediante un mecanismo de poleas y masas.

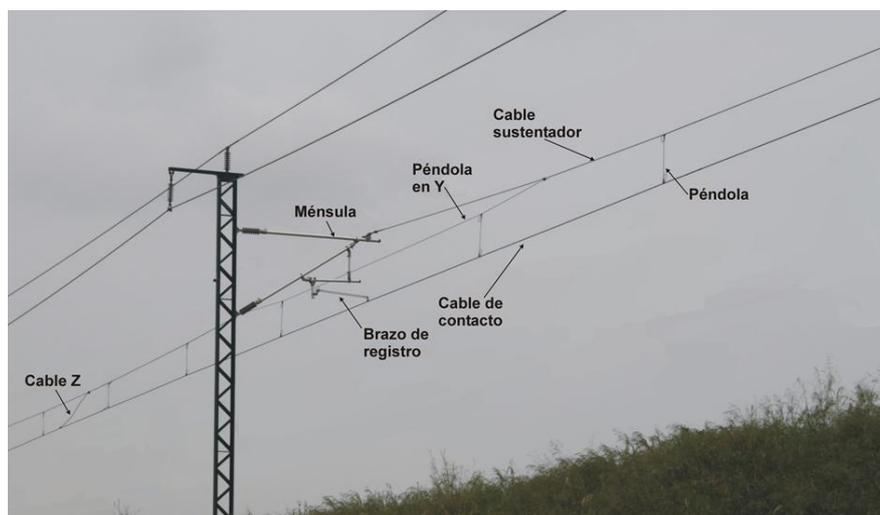


Figura 1. Elementos de la catenaria ferroviaria

En el modelo de elementos finitos se consideran los cables sustentador y de contacto, las péndolas y el brazo de registro. Las ménsulas y las poleas se sustituyen por condiciones de contorno equivalentes, utilizando resortes y amortiguadores. Para los cables sustentador y de contacto se utiliza un elemento finito tipo ANCF (Absolute Nodal Coordinate Formulation) [6], que permite incorporar comportamiento a tracción y a flexión y tiene matrices de masa constantes. Este elemento ha sido utilizado en la bibliografía para simulaciones de la interacción pantógrafo-catenaria en mallas 2D [7]. El resto de elementos son barras con deformación longitudinal únicamente, que en el caso de las péndolas sólo pueden transmitir carga de tracción.

## 3. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

### 3.1. Elemento cable ANCF

El elemento cable ANCF [6] se define en base a las coordenadas absolutas de los nodos y sus derivadas. En la figura 2 se muestra un elemento formado por sus dos nodos  $i$  y  $j$ , en su configuración de referencia sin deformación, y deformado en coordenadas globales. En el elemento no deformado, se define la coordenada  $\chi$ , que varía entre 0 y  $L$  (longitud del elemento no deformado). El vector que define los grados de libertad nodales del elemento es:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_8 \quad q_9 \quad q_{10} \quad q_{11} \quad q_{12}]^T$$

$$= \left[ x_i \quad y_i \quad z_i \quad \frac{dx_i}{d\chi} \quad \frac{dy_i}{d\chi} \quad \frac{dz_i}{d\chi} \quad x_j \quad y_j \quad z_j \quad \frac{dx_j}{d\chi} \quad \frac{dy_j}{d\chi} \quad \frac{dz_j}{d\chi} \right]^T \quad (1)$$

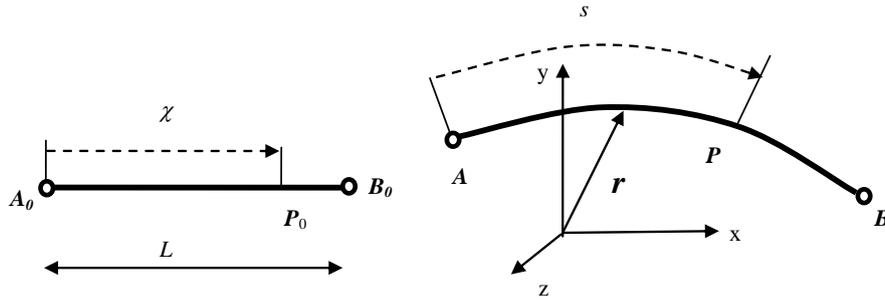


Figura 2. Elemento cable ANCF en la posición de referencia y deformado

La interpolación de elementos finitos se define a partir de la matriz de funciones de forma:

$$\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (2)$$

Las funciones de forma son polinomios cúbicos que permiten garantizar la continuidad  $C^1$  entre elementos. Si  $\xi = \chi/L$  las funciones de forma se definen como:

$$\begin{aligned} S_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ S_2(\xi) &= L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ S_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ S_4(\xi) &= L(\xi^3 - \xi^2) \end{aligned} \quad (3)$$

La deformación longitudinal del elemento se define utilizando el diferencial de arco  $ds$  del elemento deformado y el diferencial de longitud del elementos de referencia  $d\chi$  como

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} \frac{ds^2 - d\chi^2}{d\chi^2} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{ds}{d\chi} \right)^2 - 1 \right) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{q}^T \frac{\mathbf{S}_{,\xi}^T \mathbf{S}_{,\xi}}{L^2} \mathbf{q} - 1 \right) \quad (4)$$

donde la matriz  $\mathbf{S}_{,\xi}$  es la derivada de la matriz  $\mathbf{S}$  respecto de la variable local.

La curvatura en el elemento deformado se puede aproximar mediante la siguiente expresión:

$$\kappa = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right| \approx \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\chi^2} \right| = \sqrt{\mathbf{q}^T \frac{\mathbf{S}_{,\xi\xi}^T \mathbf{S}_{,\xi\xi}}{L^4} \mathbf{q}} \quad (5)$$

donde la matriz  $\mathbf{S}_{,\xi\xi}$  es la derivada segunda respecto de la coordenada local.

### 3.2. Elemento barra

Existen componentes de la catenaria como las péndolas en los que la energía asociada a la deformación de flexión es despreciable. En este caso se puede utilizar un elemento con dos nodos y tres grados de libertad por nodo, que corresponden a las coordenadas absolutas. El vector que define los grados de libertad en el elemento es

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T = [x_i \ y_i \ z_i \ x_j \ y_j \ z_j]^T \quad (6)$$

La posición de un punto del elemento se puede escribir como:

$$\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} S_1(\xi) &= 1 - \xi \\ S_2(\xi) &= \xi \end{aligned} \quad (7)$$

Para el cálculo de la deformación longitudinal de este elemento se puede utilizar la expresión definida en la ecuación 4. Obviamente, la deformación de este elemento es constante y la curvatura nula ya que las funciones de forma de este elemento son lineales.

### 3.3. Cálculo de las fuerzas de deformación elástica

En los elementos cable, la energía de deformación elástica se debe, en general, a la deformación longitudinal ( $U_L$ ) y a la flexión ( $U_F$ ) del mismo. Se calculan como:

$$U_L = \frac{1}{2} \int_0^L E A \varepsilon_L^2 d\chi \quad (8)$$

$$U_F = \frac{1}{2} \int_0^L E I \kappa^2 d\chi = \mathbf{q}^T \left[ \frac{E I}{2} \int_0^L \frac{\mathbf{S}_{,\xi\xi}^T \mathbf{S}_{,\xi\xi}}{L^4} d\chi \right] \mathbf{q} \quad (9)$$

donde  $E$  es el módulo de Young del material,  $A$  el área de la sección e  $I$  el momento de inercia. Para los dos tipos de elemento las fuerzas debidas a la deformación elástica se calculan derivando la energía respecto de las coordenadas del elemento, para obtener:

$$\mathbf{F}_L(\mathbf{q}, L) = \int_0^L E A \varepsilon_L \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{q}} d\chi \quad (10)$$

$$\mathbf{F}_F(\mathbf{q}, L) = \frac{\partial U_F}{\partial \mathbf{q}} = \left[ E I \int_0^L \frac{\mathbf{S}_{,\xi\xi}^T \mathbf{S}_{,\xi\xi}}{L^4} d\chi \right] \mathbf{q} \quad (11)$$

En general, las fuerzas de deformación elástica son funciones no lineales de las coordenadas y de la longitud de referencia (del elemento sin deformar). Las ecuaciones 10 y 11 son válidas para cada elemento. Utilizando los procedimientos de ensamblado habituales de elementos finitos se obtienen los correspondientes vectores globales. Abusando de la notación se utilizan las mismas variables para los vectores globales y de elemento.

### 3.4. Cálculo de las fuerzas gravitatorias

Las fuerzas externas debidas a la acción de la gravedad se calculan del siguiente modo:

$$\mathbf{F}_g(L) = \int_0^L \mathbf{S}^T \rho A \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{Bmatrix} d\chi \quad (12)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\rho$  la densidad del material.

## 4. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

### 4.1. Configuración inicial

El desarrollo de modelos de elementos finitos de sistemas formados por cables que sufren grandes desplazamientos durante el montaje presenta el problema del cálculo de la configuración inicial, es decir, la obtención de las coordenadas de los nodos y la longitud de cada elemento sin deformar, que se encuentra en equilibrio bajo la acción de las cargas externas y cumplen las restricciones impuestas durante el montaje. En este trabajo se proponen dos métodos para el cálculo de la configuración inicial:

#### Método A:

Se trata de resolver el sistema de ecuaciones no lineales que se obtiene de plantear el equilibrio de fuerzas en nodos (fuerzas internas menos fuerzas externas aplicadas, ecuaciones 10, 11 y 12 y las ecuaciones de restricción del montaje. Se puede escribir del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{q}, L) &= \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}, L) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{q}, L) = \mathbf{F}_L(\mathbf{q}, L) + \mathbf{F}_F(\mathbf{q}, L) - \mathbf{F}_g(L) = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}(\mathbf{q}, L) &= \mathbf{0}\end{aligned}\quad (13)$$

Las ecuaciones de restricción que se definen son las siguientes, y se desarrollan en la ecuación 14:

1. Tensión,  $T$ , conocida en el cable sustentador, cable de contacto y péndolas en Y. Se impone en un elemento de cada cable.
2. Posición,  $p$ , de los puntos de unión de los cables sustentador y de contacto, con las péndolas y las ménsulas.
3. Altura del cable de contacto,  $h_c$ , en los puntos de unión con las péndolas y el brazo de registro.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1(\mathbf{q}, L) &= F_{1_{\text{Nodo}}}^2 + F_{2_{\text{Nodo}}}^2 + F_{3_{\text{Nodo}}}^2 - T^2 = 0 \\ \mathbf{R}_2(\mathbf{q}, L) &= q_{1_{\text{Nodo}}} - p = 0 \\ \mathbf{R}_3(\mathbf{q}, L) &= q_{3_{\text{Nodo}}} - h_c = 0\end{aligned}\quad (14)$$

El número de ecuaciones de equilibrio es igual al número de grados de libertad de la malla de elementos finitos. El número de ecuaciones de restricción debe ser igual al número de variables adicionales para que el sistema se pueda resolver. Las variables adicionales son las longitudes de referencia agrupadas de forma que un conjunto de elementos varía proporcionalmente su longitud. También es necesario incluir la posición del soporte del brazo de registro. El sistema de ecuaciones de la ecuación 13 se resuelve mediante el procedimiento de Newton-Raphson.

#### Método B

En el segundo método se resuelve un problema de optimización con restricciones para conseguir ajustar la altura del cable de contacto en toda su longitud. La función que se minimiza es la diferencia entre la altura del cable de contacto y el valor deseado a lo largo de la trayectoria (ver ecuación 15), y las ecuaciones de restricción son el equilibrio de fuerzas y las restricciones de montaje (excepto la restricción 3).

$$\begin{aligned}\min & \left( \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} (r_3(\mathbf{q}, L, \xi) - h_c)^2 \right) \\ \text{sujeto a} & \\ & \mathbf{F}(\mathbf{q}, L) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{R}_1(\mathbf{q}, L) = 0 \\ & \mathbf{R}_2(\mathbf{q}, L) = 0\end{aligned}\quad (14)$$

Se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange para imponer las restricciones y obtener un sistema de ecuaciones no lineal que, de nuevo se resuelve mediante el método de Newton-Raphson.

## **4.2. Modelo del pantógrafo**

En la figura 3 se muestra un pantógrafo y el tipo de modelo simplificado utilizado en las simulaciones. Este modelo de masas concentradas, resortes y amortiguadores es ampliamente utilizado en la bibliografía por otros autores para estudiar la interacción dinámica pantógrafo-catenaria. Además, los modelos facilitados por fabricantes de pantógrafos emplean esta representación en numerosos casos.

## **4.3. Integración temporal**

Una vez definida la configuración de equilibrio de la catenaria se utiliza el modelo para simular la interacción pantógrafo-catenaria mediante integración temporal de las ecuaciones. El contacto que aparece entre el pantógrafo y la catenaria se resuelve mediante el método de penalización, añadiendo en el punto de contacto un resorte de rigidez elevada

que se comprime en función de la coordenada del cable de contacto y la masa 1 del pantógrafo. Este resorte sólo puede transmitir cargas de compresión.

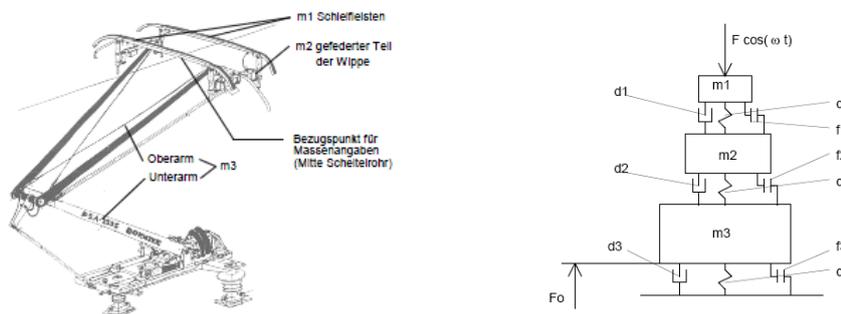


Figura 3. Pantógrafo de 3 etapas masas-resortes. Modelo DSA 380 EU (STEMMANN-TECHNIK GMBH)

La inclusión del amortiguamiento en el modelo de la catenaria provoca una disipación de energía, que provoca que la amplitud de oscilación libre del sistema decaiga con el tiempo. El modelo de amortiguamiento introducido es del tipo viscoso proporcional.

Se han definido dos modelos para realizar la simulación dinámica. El primero es completamente no lineal, ya que las fuerzas de deformación elásticas son funciones no lineales de las coordenadas de los nodos (ecuaciones 10 y 11). En el segundo se realiza una linealización del cálculo de las fuerzas de deformación. Como los desplazamientos debidos a la vibración no son elevados, esta aproximación es válida y permite reducir el tiempo de cálculo necesario para obtener la solución. En este segundo modelo se sigue manteniendo la no linealidad en el comportamiento unilateral de las péndolas (que sólo pueden transmitir cargas de tracción) y el contacto (que sólo transmite compresión).

Se ha utilizado un esquema de integración implícito HHT (método  $\alpha$ ) para obtener la solución en ambos modelos [8]. El tiempo de cálculo para el modelo linealizado se reduce en un factor del orden de 4 respecto del modelo no lineal, manteniéndose la solución muy similar.

## 5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

A continuación se presentan los resultados de la simulación del comportamiento dinámico de dos tipos de catenaria:

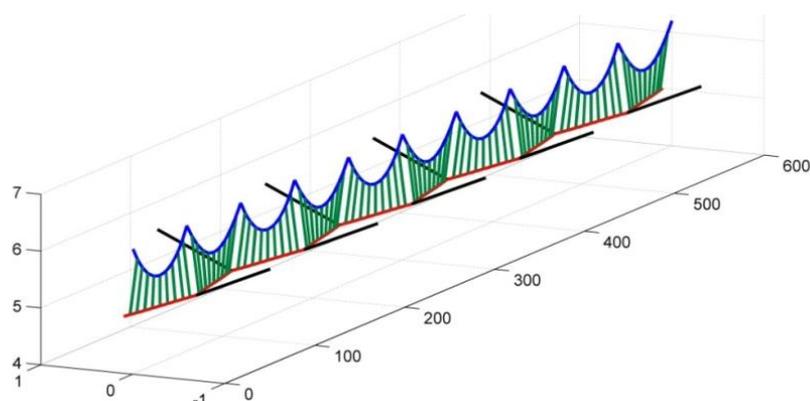


Figura 4. Catenaria de la norma EN50318

### 5.1. Catenaria norma EN50318

La norma EN50318 [9] presenta con detalle un tipo de catenaria y pantógrafo que se puede utilizar para validar los procedimientos de resolución comparando los resultados obtenidos de fuerzas de contacto y desplazamientos con unos valores de referencia proporcionados por

la norma. La catenaria de la norma consta de 10 vanos de 60 m, con un encumbramiento de 1.2 m y un escalonamiento de  $\pm 0.2\text{m}$  y con 9 péndolas por vano. En la figura 4 se muestra la configuración de equilibrio obtenida.

La simulación debe realizarse para dos velocidades del pantógrafo de 250 km/h y 300 km/h. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 1, donde se comparan los valores de referencia definidos en la norma con los resultados de la simulación. En la figura 5 se muestran los resultados obtenidos de fuerza de contacto y desplazamientos para 300 km/h.

	250 km/h		300 km/h	
	Referencia	Simulación	Referencia	Simulación
Fuerza de contacto media [N]	110 a 120	119.57	110 a 120	118.84
Desviación típica [N]	26 a 31	28.50	32 a 40	34.04
Máximo estadístico de la fuerza de contacto [N]	190 a 210	205.07	210 a 230	220.94
Mínimo estadístico de la fuerza de contacto [N]	20 a 40	34.07	-5 a 20	16.73
Máximo real de la fuerza de contacto [N]	175 a 210	178.32	190 a 225	208.62
Mínimo real de la fuerza de contacto [N]	50 a 75	56.36	30 a 55	48.98
Elevación máxima en el soporte [mm]	48 a 55	51.96	55 a 65	57.46
		48.97		63.00
		48.62		58.94
Porcentaje de pérdida de contacto [%]	0	0	0	0

Tabla 1. Resultados para la catenaria de la norma EN50318

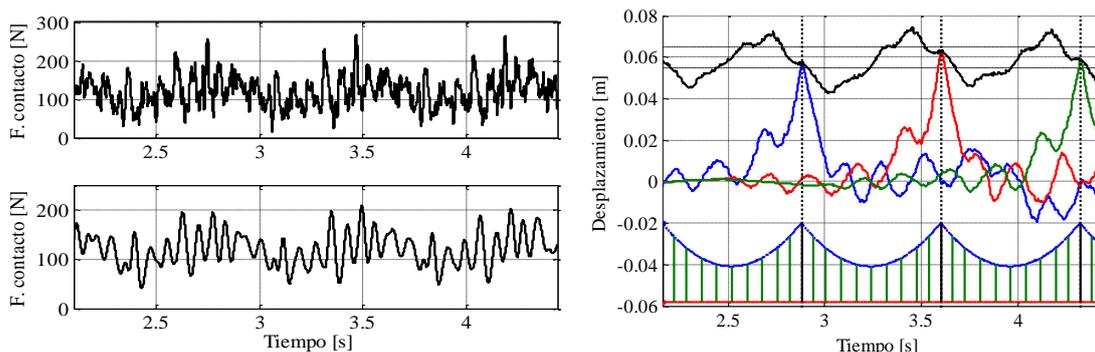


Figura 5. Fuerza de contacto y desplazamiento a 300km/h para la norma EN50318

### 5.2. Catenaria tipo AVE

La figura 6 muestra la catenaria con la tipología típica de las líneas de Alta Velocidad Española. El modelo de pantógrafo utilizado es el de la figura 3. Los resultados de la simulación para una velocidad del vehículo de 300 km/h se muestran en la figura 7, donde se observa la fuerza de contacto y los desplazamientos verticales del brazo de registro.

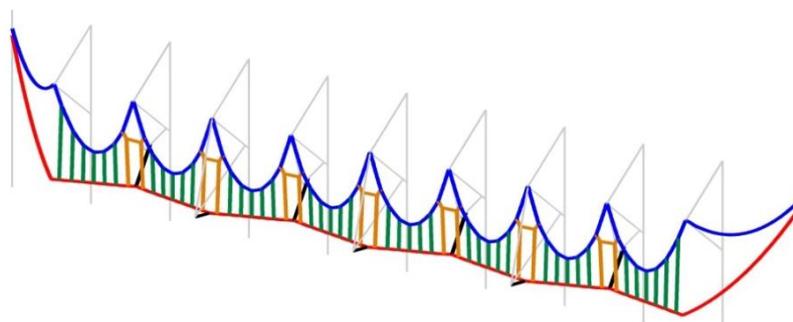


Figura 6. Catenaria tipo AVE

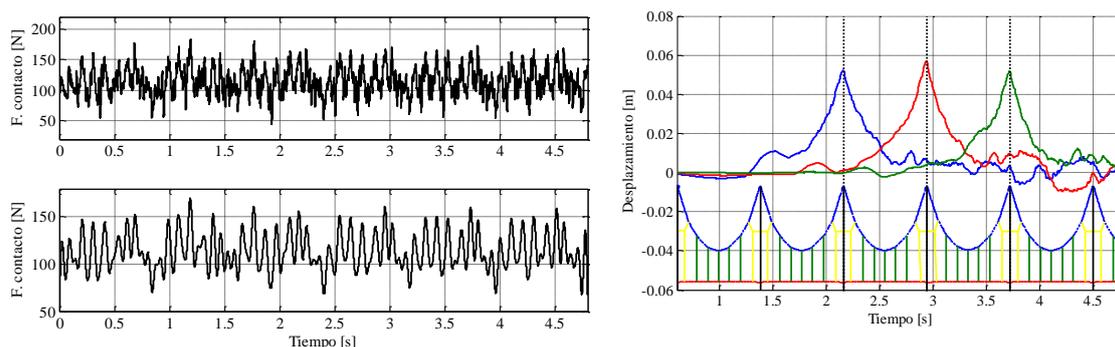


Figura 7. Fuerza de contacto (sin filtrar y filtrada a 20 Hz) y desplazamiento para catenaria tipo AVE

## 6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Generalitat Valenciana por la financiación recibida a través del programa PROMETEO/2012/023.

## 7. REFERENCIAS

- [1] Collina, A., and Bruni, S., Numerical simulation of pantograph-overhead equipment interaction, *Vehicle System Dynamics*, 38(4), 261-291, 2002.
- [2] J.P. Massat, J.P. Lainé, A. Bobillot, Pantograph-catenary dynamic simulation. Proceedings of the IAVSD conference, 2004.
- [3] T. Schulze, W. Baldauf, G. Poetsch, Validated simulation tools for reliable investigations of the catenary-pantograph interaction. WCRP 2001.
- [4] Yong Hyeon Cho, Numerical simulation of the dynamic responses of railway overhead contact lines to a moving pantograph considering a nonlinear dropper, *J. Sound and Vib.* 315, 433-454, 2008.
- [5] O. Lopez-Garcia, A. Carnicero, J.L. Maroño, Influence of stiffness and contact modeling on catenary-pantograph system dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 299(4-5), pp. 806-821, 2007.
- [6] A.A. Shabana. Computer implementation of the absolute nodal coordinate formulation for flexible multibody dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 16:293-306, 1998.
- [7] Jong-Hwi Seo, Seok-Won Kim, Il-Ho-Jung, Tae-Won Park, Jin, Yong Mok, Young-Guk Kim, Jang-Bom Chai, Dynamic analysis of a pantograph-catenary system using absolute nodal coordinates, *Vehicle System Dynamics*. 44, 615-630, 2006.
- [8] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1987.
- [9] European Committee for Electrotechnical Standardization EN 50318:2002: Aplicaciones ferroviarias – Sistemas de captación de corriente – Validación de la simulación de la interacción dinámica entre el pantógrafo y las líneas aéreas de contacto, 2002.