

# Un método eficaz para la modelización dinámica vertical de la interacción rueda-carril

**N. Correa García, O. Oyarzabal de Celis, E. García Vadillo, J. Santamaría Manrique, J. Gómez López**

*Departamento de Ingeniería Mecánica. Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Alda Urquijo s/n, 48013 Bilbao. Universidad del País Vasco UPV/EHU*  
nekane.correa@ehu.es

---

*En este artículo se presenta un modelo específicamente concebido para el estudio de la interacción entre rueda y carril. El modelo trabaja en el dominio del espacio y se construye de forma sencilla a partir de las receptancias de la vía, obtenidas, en este caso, mediante un modelo completo de vía en el dominio de la frecuencia desarrollado previamente por los autores, que incluye la deformación de la sección del carril y la propagación de ondas de flexión, elongación y de alabeo [1-3]. La transformación entre dominios se ha logrado mediante la aplicación de un método modificado de las fracciones racionales polinómicas. El método de transformación utilizado permite obtener un modelo en el dominio del espacio muy sencillo, con muy pocos grados de libertad, proporcionando resultados de alta precisión en un rango suficientemente amplio de frecuencias, y en el que los cálculos conllevan un coste computacional muy bajo. Este método está basado en el ajuste de las receptancias de la vía mediante funciones de transferencia, y el posterior paso al dominio del espacio. Utilizando algoritmos genéticos se ha conseguido un más fácil y mejor ajuste de las receptancias de la vía. El contacto se ha representado por un resorte de Hertz no lineal, de forma que se permite el despegue entre la rueda y el carril que se podría producir al paso de la primera sobre un defecto del carril. Además, al considerarse que es la rueda la que se mueve y no la irregularidad, es posible tener en cuenta la excitación a la frecuencia de paso por traviesa. El modelo se utiliza para el estudio de las cargas dinámicas y los desplazamientos que aparecen en los puntos de contacto de rueda y carril al paso por defectos de soldadura de carril.*

---

## 1. INTRODUCCIÓN

La presencia de soldaduras entre tramos de carril en las vías con carril continuo soldado (CCS) produce una irregularidad en la geometría del carril en las proximidades de la soldadura. A pesar de que esta irregularidad se suaviza mediante el amolado al que se somete a los carriles tras el soldeo, es habitual que se mantenga un cierto grado de defecto, limitado según la normativa para la aceptación de soldaduras de carril. La irregularidad en la superficie de la cabeza del carril puede producir un incremento considerable en las cargas dinámicas en el contacto al paso de la rueda que podrían perjudicar a la vía.

En general, el estudio de la interacción entre la rueda y el carril se puede llevar a cabo de dos maneras distintas: en el dominio de la frecuencia, o en el dominio del espacio. Cada una de ellas tiene unas aplicaciones determinadas para las que presenta ventajas respecto de la otra. Así, el trabajo en el dominio de la frecuencia permite obtener modelos lineales muy precisos, que incluyen la deformación de la sección del carril y la propagación de las ondas de elongación, flexión y alabeo, y que presentan como gran ventaja su rapidez de cálculo. Además, dada esa gran velocidad de cálculo de los modelos en el dominio de la frecuencia, es posible la optimización de los parámetros de las vías para mejorar su comportamiento [4]. Sin embargo, en los problemas no lineales, como es el que se pretende estudiar en este artículo, es necesario recurrir a modelos en el dominio del tiempo. Estos requieren un mayor tiempo de cálculo, aún con modelos mucho menos precisos que aquellos a los que se puede llegar trabajando en el dominio de la frecuencia.

Por ello, en este artículo se ha optado por desarrollar un modelo de vía en el dominio del tiempo obtenido a partir de la transformación de un modelo en el dominio de la frecuencia

desarrollado por los autores [1-3], mediante el método de las fracciones polinómicas. De esta forma se ha aprovechado un modelo muy detallado en la frecuencia para obtener un modelo simplificado en el dominio del espacio. Métodos de transformación de este tipo, tanto para vías con apoyo continuo, como con apoyo discreto han sido aplicados por Wu y Thompson [5,6] y por otros autores [7,8] para el estudio de diferentes fenómenos observados en el contacto rueda/carril.

El método de transformación utilizado permite obtener un modelo en el dominio del tiempo muy sencillo, con muy pocos grados de libertad, proporcionando resultados de buena precisión, y con el que los cálculos conllevan un coste computacional muy bajo. Este método está basado en el ajuste de las receptancias de la vía mediante funciones de transferencia, y el posterior paso al dominio del tiempo. A fin de conseguir un más fácil y mejor ajuste de las receptancias de la vía, se han empleado algoritmos genéticos.

La rueda se ha modelizado, por simplicidad, como una masa sobre la que está aplicada el peso correspondiente del vehículo y el contacto se ha representado por un resorte de Hertz no lineal, de forma que se permite el despegue entre la rueda y el carril que se puede producir al paso de la primera sobre un defecto del carril. Además, al considerarse que es la rueda la que se mueve y no la irregularidad, es posible tener en cuenta la excitación a la frecuencia de paso por traviesa.

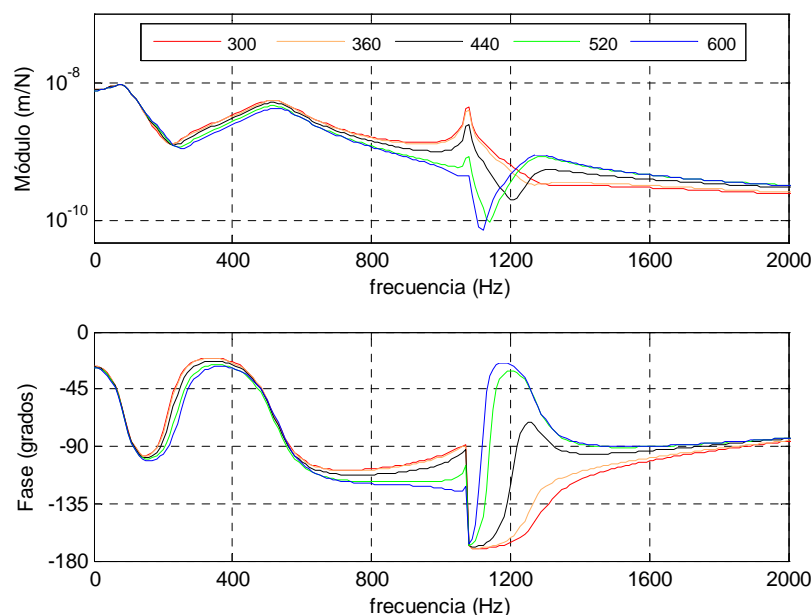


Figura 1. Receptancias de la vía en las secciones del vano correspondientes al milímetro: 300, 360, 440, 520, 600

En el artículo se ha trabajado con una vía con apoyo discreto, cuyas receptancias en algunas secciones de un vano de vía se muestran en la figura 1. Las receptancias se han obtenido a partir de los valores de características de la vía indicadas en la tabla 1. Los valores de esta tabla son los empleados para la validación del método, lo cual se ha llevado a cabo comparando los resultados con los mostrados en [6,9].

En la figura 1 se puede observar la gran diferencia que presentan entre sí las distintas receptancias, en particular a las frecuencias próximas al primer modo de pinned-pinned vertical, alrededor de 1080 Hz, donde se produce una resonancia en mitad de vano y una antirresonancia sobre la traviesa. Las receptancias de secciones situadas entre mitad de vano y sobre traviesa toman una forma intermedia entre la de las dos anteriores, de manera que presentan una resonancia y una antirresonancia muy próximas alrededor de esa frecuencia. Esta gran diferencia entre las receptancias de las distintas secciones del vano hace que sea más complicada la transformación del dominio de la frecuencia al del espacio.

Rigidez del pad (KN/mm)	348.6
Amortiguamiento del pad (-)	0.29
Rigidez del balasto (KN/mm)	50
Amortiguamiento del balasto (-)	1
Masa de la traviesa (kg)	324
Separación entre traviesas (m)	0.6
Carril	60E1
Separación entre traviesas (m)	0.6

Tabla 1: Parámetros de la vía

El modelo de interacción desarrollado en este artículo se aplica al estudio de la respuesta dinámica de la rueda y el carril cuando éste presenta una soldadura aceptable según los criterios de la normativa [10].

## 2. MODELO DE VÍA EMPLEADO

### 2.1. Método de las fracciones racionales polinómicas aplicado al caso de la vía

El método de las fracciones racionales polinómicas [11] consiste en obtener las funciones de transferencia en el plano  $s$  (de Laplace) que tengan por receptancias las dadas como dato (las de la vía en nuestro caso), las cuales definen el comportamiento del sistema para un determinado rango de frecuencias. Estas funciones de transferencia  $G(s)$  se expresan como cocientes de polinomios (ecuación (1)), cuyos coeficientes se calculan mediante la resolución del problema de minimización de la ecuación (2). Ésta se corresponde con la minimización del error cuadrático entre la receptancia original y la receptancia ajustada durante la optimización en el rango de frecuencias en el que se está realizando el ajuste.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (1)$$

En la ecuación (1),  $Y(s)$  es la transformada de Laplace de la función de desplazamiento del punto del carril en contacto con la rueda,  $F(s)$  la transformada de Laplace de la fuerza de contacto y  $A(s)$  y  $B(s)$  el denominador y el numerador de la función de transferencia.

En la ecuación (2),  $\mathbf{h}$  es la receptancia dato que se pretende ajustar,  $\boldsymbol{\omega}$  es el vector de frecuencias angulares, cuya longitud es  $l$ , y  $\mathbf{wt}$  es un vector de pesos del error a las distintas frecuencias en las que se está haciendo el ajuste.

$$\min_{a,b} \sum_{k=1}^l \mathbf{wt}(k) \left| \mathbf{h}(k) - \frac{B(\boldsymbol{\omega}(k))}{A(\boldsymbol{\omega}(k))} \right|^2 \quad (2)$$

Los grados de los polinomios de numerador y denominador  $m$  y  $n$  de las funciones de transferencia resultado de la ecuación (1) coinciden con el número de ceros y de polos de estas funciones de transferencia, respectivamente.

Una vez calculada la función de transferencia en distintas secciones del vano de la vía, el sistema de ecuaciones diferenciales asociado se obtiene mediante la transformada inversa de Laplace de las funciones de transferencia. El resultado de esta operación es una ecuación diferencial ordinaria (ecuación (3)) de orden igual al grado del polinomio del denominador de la función de transferencia, donde  $y$  es el desplazamiento del punto del carril en contacto con la rueda y  $f$  es la fuerza de contacto. Esta ecuación (3) se puede transformar en un sistema de ecuaciones diferenciales de orden uno (ecuación (4)).

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = b_1 f^{(m)}(t) + b_2 f^{(m-1)}(t) + \dots + b_{m-1} f'(t) + b_m f(t) \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_2(t) + c_1 f(t) \\
x_2'(t) &= x_3(t) + c_2 f(t) \\
&\dots \\
x_{n-1}'(t) &= x_n(t) + c_{n-1} f(t) \\
x_n'(t) &= -a_n x_1(t) - a_{n-1} x_2(t) - a_{n-2} x_3(t) - \dots - a_1 x_n(t) + c_n f(t)
\end{aligned} \tag{4a}$$

donde los valores que corresponden a  $c$  son [12]:

$$\begin{aligned}
c_1 &= b_1 \\
c_2 &= b_2 - a_1 b_1 \\
c_3 &= b_3 - (a_2 b_1 + a_1 b_2) \\
&\dots \\
c_n &= b_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} c_k
\end{aligned} \tag{4b}$$

cumpliéndose que:

$$y(t) = x_1(t)$$

La minimización de la expresión de la ecuación (2), tomando como variables los coeficientes de los polinomios de la función de transferencia, se lleva a cabo mediante la utilización de un algoritmo de Gauss-Newton amortiguado y modificado para garantizar la estabilidad del sistema. Este se encuentra implementado en la función *invfreqs* incluida en la toolbox de MATLAB llamada Signal Processing [13].

Pero, para llevar a cabo esta optimización anterior, es necesario definir un vector de pesos **wt**. Los vectores de peso **wt** (ecuación (2)) del error a cada frecuencia de la receptancia tienen gran importancia en la calidad del ajuste de las receptancias realizado. En el método desarrollado se ha incluido el método de optimización de algoritmos genéticos multiobjetivo para calcular el vector de pesos óptimo a utilizar en los ajustes. Se utilizan dos funciones objetivo. La primera de ellas es la correspondiente al error en el ajuste, de forma que los vectores de pesos que produzcan menor error en el ajuste lleven a valores más bajos de la función objetivo. La segunda función objetivo es la correspondiente al orden de magnitud de los coeficientes. Esta función objetivo tiene importancia para la integración de las ecuaciones en el dominio del espacio, ya que si los coeficientes de las funciones de transferencia de las secciones adyacentes tienen órdenes de magnitud muy diferentes la integración se dificulta en gran medida.

En esta optimización por algoritmos genéticos, las componentes del vector de pesos **wt** se han considerado como valores binarios. Ello facilita un ajuste más rápido y eficaz que si se hubieran utilizado variables reales.

## 2.2. Aplicación del método de transformación para obtener el modelo de vía

En este apartado se muestran los ajustes realizados para algunas de las receptancias de una vía cuyos parámetros son los presentados en la tabla 1. Estas receptancias han sido calculadas, como ya se ha mencionado anteriormente, con el primer módulo de una herramienta matemática desarrollada por los autores [1-3].

Las receptancias, en este caso, se han calculado para secciones del vano de vía separadas 4 cm entre sí. Esta distancia es suficiente para que se pueda apreciar una variación de las receptancias entre las secciones, y a la vez, suficientemente pequeña como para poder captar de manera correcta el efecto de la excitación paramétrica que se produce al pasar por cada vano de vía, lo cual se ha comprobado que tiene una gran importancia en la interacción entre la rueda y el carril.

La figura 2 muestra los ajustes de la receptancia sobre traviesa y a 320mm de la traviesa respectivamente. Cabe destacar que conseguir un ajuste muy bueno de las receptancias a todas las frecuencias resulta muy complicado, especialmente a baja frecuencia y a alta frecuencia. Aunque podría pensarse en prescindir de un buen ajuste a baja frecuencia y centrarse en frecuencias medias y altas, hay que tener en cuenta que la frecuencia de paso por traviesa, que puede ser muy importante, se produce precisamente a frecuencia baja, salvo para alta velocidad. Es por ello, que en estos ejemplos de las figuras se ha preferido tener un ajuste ligeramente peor a frecuencias medias (en el caso de las figuras mostradas, alrededor de la primera antirresonancia) que a bajas. Además, en la representación en escala logarítmica, el error en una antirresonancia aparece exagerado, mientras que en escala lineal este error resulta completamente despreciable.

Una vez conseguidas las funciones de transferencia asociadas a las receptancias de cada sección del vano, se les aplica la transformada inversa de Laplace. El resultado, como ya se ha comentado, es una ecuación diferencial ordinaria del mismo grado que el denominador de las funciones de transferencia, que se puede pasar a un sistema de ese mismo número de ecuaciones de orden 1. Se obtiene, por tanto, un sistema de ecuaciones con coeficientes variables en el espacio (debido a las distintas posiciones del eje montado sobre el vano de la vía).

Con este método para el paso al dominio del espacio, la mayor dificultad reside en la obtención de este sistema. Sin embargo, una vez calculado, la integración es muy rápida, dado que el sistema al que se ha aproximado tiene muy pocos grados de libertad. Hay que tener en cuenta que este cálculo se realiza una sola vez, y que una vez ajustado, salvo que se produzca un cambio en la vía, no es necesario volver a hacer este ajuste.

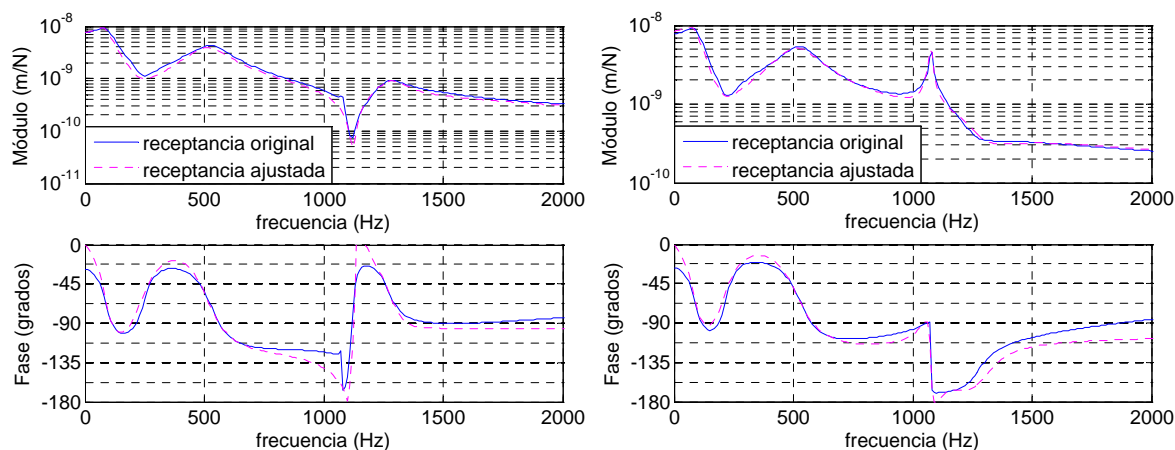


Figura 2. Ajustes de las receptancias de la sección situada sobre la traviesa (izquierda) y de la sección a 320 mm de la traviesa (derecha)

### 3. INTERACCIÓN ENTRE CARRIL Y RUEDA

Aunque el eje montado podría estar representado por un modelo mucho más complejo, en este caso se ha optado por una simple masa puntual, sobre la que está aplicado el peso del vehículo que soporta esa rueda ( $W$ ). Su ecuación sería, por tanto, de la forma indicada en la ecuación (5).

$$m_w \ddot{x}_w + f_{\text{contacto}} = W \quad (5)$$

donde  $x_w$  es el desplazamiento vertical de la rueda y  $m_w$  es su masa.

La fuerza de contacto  $f_{\text{contacto}}$  entre la rueda y el carril se describe mediante la expresión no lineal dada en la ecuación (6).

$$f_{\text{contacto}} = C_H (x_w - y - r)^{3/2} \text{ para } x_w - y - r \geq 0$$

$$f_{\text{contacto}} = 0 \text{ para } x_w - y - r \leq 0$$
(6)

donde  $y$  es el desplazamiento vertical del carril en el punto de contacto,  $C_H$  es la constante de Hertz del contacto y  $r$  representa una irregularidad cualquiera del carril o de la rueda. Si la irregularidad es del carril, el que  $r$  sea positivo indica que hay un hundimiento del carril, y que sea negativo, un saliente.

Los valores tomados han sido:  $M_w=600$  kg,  $C_H=93.7$  GN/m<sup>3/2</sup> [6] y  $W=100$ KN.

#### 4. APLICACIÓN DEL MÉTODO A LA MODELIZACIÓN DE FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS AL PASO POR UNA SOLDADURA

Las soldaduras de carril constituyen uno de los elementos críticos en el CCS. Dependiendo de la calidad de la soldadura tras su amolado, se pueden producir grandes cargas dinámicas al paso del eje montado sobre la vía. Con el paso repetido de los ejes sobre las soldaduras pueden aparecer grietas en el carril debido a la fatiga, que pueden llevar a una rotura de carril, que es especialmente peligrosa cuando se trata del carril exterior en una curva.

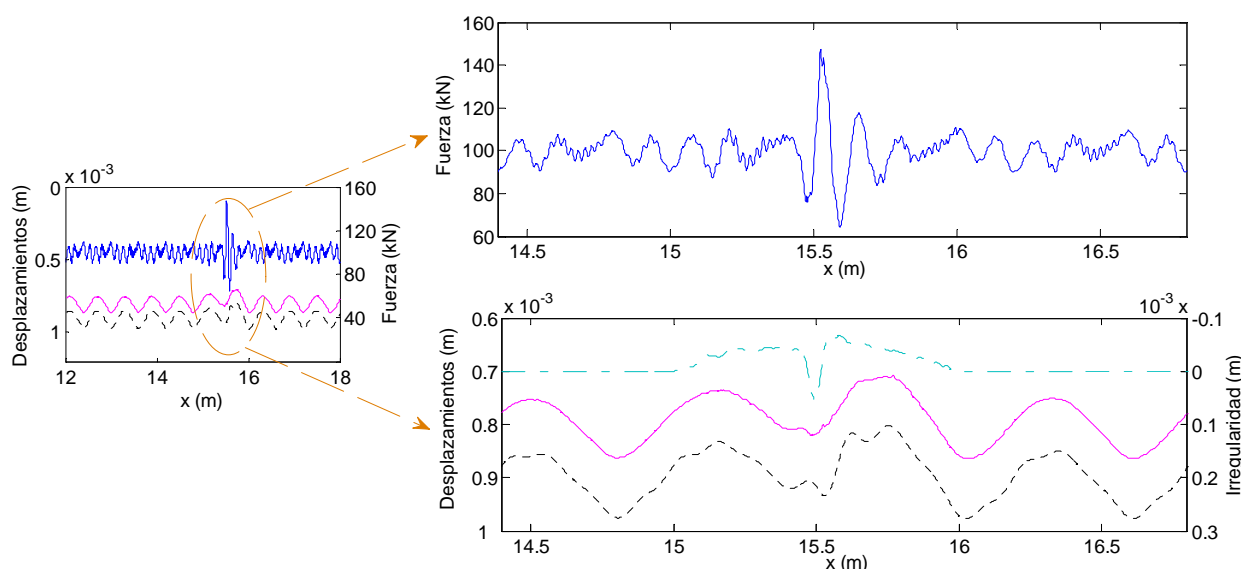


Figura 3. Fuerza (—) y desplazamientos de rueda (...) y carril (---) en el contacto (izquierda) para velocidad de 120 km/h. Detalle de la fuerza (superior derecha) y detalle de los desplazamientos de rueda (...) y carril (---) e irregularidad (---) (inferior derecha)

En este apartado se muestra un ejemplo obtenido para la vía anteriormente ajustada mediante el método desarrollado, cuando el eje pasa sobre la irregularidad debida a la soldadura. El método desarrollado es especialmente idóneo para este tipo de cálculos, ya que se reproduce con gran precisión el comportamiento de la vía, incluyendo el efecto de la excitación periódica al paso por las traviesas, a la vez que el consumo computacional de cada simulación es mínimo.

Para este artículo, se ha utilizado una irregularidad que responde a la forma mostrada en la parte inferior derecha de la figura 3, obtenida de [14] y que presenta un valor aceptable según la norma europea EN 14730-2 [10].

En la figura 3 se representan la fuerza de contacto y los desplazamientos de los puntos de contacto de rueda y carril, que se producen cuando la rueda circula a 120 km/h sobre la irregularidad de la superficie del carril debida a la soldadura. Se ha de notar que la

separación que existe entre los desplazamientos de la rueda y el carril se debe a la deformación en el contacto debido al peso del vehículo soportado por esa rueda.

Antes de encontrarse con el defecto de la soldadura, se puede observar, en la figura izquierda, la influencia del paso por traviesa, que hace que las fuerzas y los desplazamientos no tengan un valor constante sino periódico, con periodo espacial definido por la separación entre traviesas (0.6 m). Esta figura izquierda se ha ampliado en la zona en la que se encuentra la soldadura para poder apreciar mejor las fuerzas y los desplazamientos en esa zona, y se ha representado en la parte derecha de la figura.

Al comienzo de la irregularidad, los desplazamientos de rueda y de carril no sufren grandes alteraciones, dado que la primera parte del defecto debido a la soldadura consiste en una leve y suave elevación de la superficie del carril. Al iniciar la rueda el descenso debido al hundimiento de la superficie del carril en la parte central de la soldadura, se produce una caída de la fuerza a la cual le sigue un aumento brusco, llegando a un incremento de la fuerza de contacto respecto a su valor medio de un 47.5%.

En la figura también se aprecia la variación de la fuerza que supone el paso por las distintas posiciones del vano, cuyo valor pico-pico es aproximadamente un 19% de la fuerza estática.

Se puede observar también que la excitación tras el impacto dura muy poco, desapareciendo prácticamente tras pasar la soldadura.

## 5. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un método para mejorar y facilitar el paso de modelos de vía en el dominio de la frecuencia a modelos en el dominio del espacio. Esto puede ser muy interesante cuando se dispone ya de un modelo muy preciso en el dominio de la frecuencia que, frente a los modelos habituales en el dominio del espacio, pueda tener en cuenta con gran precisión el comportamiento dinámico de la vía, incluyendo la deformación de la sección del carril y la propagación de las ondas de elongación, flexión y alabeo, y se quiere aprovechar las ventajas que éste presenta frente a otros modelos más simplificados en el dominio del espacio. Además, el modelo al que se llega mediante este método es muy sencillo, con muy pocos grados de libertad, con lo cual se compensa el tiempo que requiere el paso al dominio del espacio con la gran reducción en el tiempo de simulación.

El método desarrollado parte de las receptancias obtenidas con el modelo en el dominio de la frecuencia en secciones de la vía tan próximas entre sí como se desee, y a partir de ellas construye un modelo en el dominio del espacio que se ajuste a esas mismas receptancias. Para ello se basa en la aplicación del método de las fracciones racionales polinómicas con un vector de pesos a cada frecuencia del ajuste que se optimiza mediante algoritmos genéticos, para conseguir el mejor ajuste posible de las receptancias de la vía, que son el dato de entrada. El resultado de este ajuste es una función de transferencia cuya respuesta en frecuencia se aproxima a la receptancia dato, y que se puede transformar en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias aplicando la transformada inversa de Laplace. Este ajuste se repite para distintas secciones del vano de la vía, obteniendo como resultado un sistema de ecuaciones en el dominio del espacio que varía a lo largo del vano de la vía. Además, el método garantiza la estabilidad del sistema en el dominio del espacio resultante y unos coeficientes del ajuste acotados, que facilitan la integración del sistema de ecuaciones.

El modelo de interacción entre rueda y carril se ha aplicado al estudio de los desplazamientos y de las fuerzas de contacto que aparecen cuando el eje montado pasa sobre una soldadura.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Ministerio de Investigación e Innovación MICINN su ayuda a través del contrato TRA2010-18386, incluyendo los fondos FEDER, y al Gobierno Vasco por su ayuda IT-453-10 y la beca de investigación BFI08.172. Agradecemos también la asistencia y las valiosas sugerencias de Euskal Trenbide Sarea/Red Ferroviaria Vasca ETS/RFV y de

Metro Bilbao. Se agradece asimismo, la ayuda económica de la UPV/EHU a través de la Unidad de Formación e Investigación UFI11/29.

## 7. REFERENCIAS

- [1] I. Gómez, E.G. Vadillo. An analytical approach to study a special case of booted sleeper track rail corrugation, *Wear*. 251 (2001) 916-924.
- [2] I. Gómez, E.G. Vadillo. A linear model to explain short pitch corrugation on rails, *Wear*. 255 (2003) 1127-1142.
- [3] J. Gómez, E.G. Vadillo, J Santamaría. A comprehensive track model for the improvement of corrugation models, *J.Sound Vibrat.* 293 (2006) 522-534.
- [4] O. Oyarzabal, J. Gómez, J. Santamaría, E.G. Vadillo. Dynamic optimization of track components to minimize rail corrugation, *J.Sound Vibrat.* 319 (2009) 904-917.
- [5] T.X. Wu, D.J. Thompson. Theoretical investigation of wheel/rail non-linear interaction due to roughness excitation, *Veh.Syst.Dyn.* 34 (2000) 261-282.
- [6] T.X. Wu, D.J. Thompson. On the parametric excitation of the wheel/track system, *J.Sound Vibrat.* 278 (2004) 725-747.
- [7] G. Bonin, G. Cantisani, M. Carbonari, G. Loprencipe, A. Pancotto, Railway traffic vibrations: generation and propagation - Theoretical aspects, 4th International SIIV Congress - Palermo (Italy). (2007).
- [8] G. Bonin, G. Cantisani, M. Carbonari, G. Loprencipe, A. Pancotto, Railway traffic vibrations: generation and propagation - Use of computational models, 4th International SIIV Congress - Palermo (Italy). (2007).
- [9] T.X. Wu, D.J. Thompson. On the rolling noise generation due to wheel/track parametric excitation, *J.Sound Vibrat.* 293 (2006) 566-574.
- [10] EN 14730-2:2006. Railway applications. Track. Aluminothermic welding of rails. Qualifications of aluminothermic welders, approval of contractors and acceptance of welds.
- [11] M.H. Richardson, D.L. Formenti, Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials, 1st International Modal Analysis Conference. Orlando, FL (1982).
- [12] F.H. Raven, Automatic control Engineering, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1987.
- [13] The MathWorks Inc., Signal Processing Toolbox™ User's Guide, 2010.
- [14] M.J.M.M. Steenbergen. Quantification of dynamic wheel-rail contact forces at short rail irregularities and application to measured rail welds, *J.Sound Vibrat.* 312 (2008) 606-629.