Aproximación en polinomios de Chebyshev para el modelo de dinámica longitudinal del vehículo

A. López Rosado, C. Moriano Sánchez, R. Álvarez Fernández

Dpto. de Ingeniería Industrial. Universidad Nebrija
alopezro@nebrija.es

La resolución de las ecuaciones de la dinámica vehicular, en general no lineales, requiere una alta carga computacional al aplicar métodos numéricos tradicionales. La línea de investigación en la que se enmarca este artículo se centra en la búsqueda de soluciones analíticas aproximadas, de procesamiento más eficiente.

En concreto, en este trabajo se resuelve la ecuación diferencial no lineal que describe la dinámica longitudinal de un vehículo de forma aproximada, mediante desarrollo en serie de polinomios de Chebyshev. Este desarrollo en serie tiene un error tan pequeño como queramos, basta con aumentar el grado del polinomio para reducir el error. Se expande la ecuación diferencial en el término de velocidad obteniendo por derivación e integración las series de aceleración y desplazamiento respectivamente. Se compone la serie de la ecuación diferencial completa y finalmente, para mejorar la precisión se utiliza el método tau de Lanczos de perturbación de sistemas dinámicos.

Como resultado se comprueba que los polinomios en serie de Chebyshev, permiten un cálculo mucho más eficiente y rápido que la integración numérica, manteniendo un error pequeño, del orden del 0,0023% para el desplazamiento y 0,008% para la velocidad con polinomios de grado 4, que es muy bajo.

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo plantea la posibilidad de desarrollar en polinomios de Chebyshev las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica vehicular, de tal manera que se buscan formulaciones más eficaces desde el punto de vista computacional. Este trabajo se centra en estudiar la dinámica longitudinal de un vehículo, que como es sabido presenta su no-linealidad en la fuerza aerodinámica.

En un primer trabajo [1] se mostraba un ejemplo de desarrollo en serie de potencias para un modelo de dinámica vehicular al que posteriormente se le aplicaba una economización por Chebyshev para reducir el grado del polinomio sin perjudicar con ello el error. Las expresiones polinomiales obtenidas, permitían un cálculo rápido de las ecuaciones dinámicas en tiempo real.

En este trabajo el desarrollo se realizará directamente en polinomios de Chebyshev que permiten utilizar un menor grado con lo que se reduce el tiempo de cómputo con respecto a los polinomios de potencias.

El enfoque propuesto, algo inusual en la ingeniería de vehículos, propone el uso de cálculo simbólico en lugar de métodos puramente numéricos de integración y la búsqueda de soluciones aproximadas, con resultados razonablemente precisos y mucho más rápidos, en lugar de buscar una precisión extraordinaria.

2. POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Los polinomios de Chebyshev [2] de primera especie vienen definidos por la expresión siguiente:

$$T_n(x) = \cos\left[\, n \ \ \arccos(x)\,\right] \tag{1}$$

y cumplen la propiedad de ser ortogonales con respecto a la función $w(x) = \left(1 - x^2\right)^{-1/2}$ en el intervalo {-1,1}. En general la variable independiente, el tiempo, trabajará en intervalos de ortogonalidad distintos {a, b}, por lo que habrá que hacer un cambio de variable.

Una vez que se han definido los polinomios de Chebyshev podemos estudiar el uso de dichos polinomios para aproximar funciones. El desarrollo de una función y(u) en serie continua infinita de Chebyshev tiene la forma siguiente:

$$y(u) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' C_n T_n(u)$$

$$\text{siendo } \ C_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}\, y(u)\ T_n(u)\, du \tag{2}$$

Donde la comilla simple del sumatorio indica que se debe dividir el primer término por 2.

Si se trunca la serie en el término N+1 se obtiene el desarrollo continuo de Chebyshev truncado, de tal manera que la función queda definida como sigue:

$$y(u) \approx \sum_{n=0}^{N}{}' C_n T_n(u) \tag{3}$$

Al truncar la serie en grado N, se obtiene una aproximación a la función, tanto más precisa, cuanto mayor sea N. Por las propiedades de los polinomios de Chebyshev, truncar en N-1 es la mejor aproximación polinomial de grado N-1 al desarrollo de grado N.

Los coeficientes pueden ser evaluados por integración directa en algunas funciones particulares, pero con carácter general esto no es posible y se debe aproximar la integral anterior mediante alguna fórmula de cuadratura. En esos casos se puede utilizar la expansión discreta de Chebyshev como se ve en [3]. MAPLE utiliza algoritmos de cuadratura, que analizan en primer lugar las singularidades, a continuación emplea la cuadratura de Clenshaw-Curtis [4,5], si con ello no se obtiene un buen resultado se utilizan fórmulas de Newton-Cotes adaptativas. Todo este proceso se realiza en la función Chebpade de la librería de aproximación de funciones Numapprox de MAPLE.

3. TEORÍA DE LA PERTURBACIÓN PARA SISTEMAS DIFERENCIALES

Esta teoría es formulada inicialmente por Lanczos [6] y su aplicación a la integración de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales se puede consultar en [2].

Si la expansión finita de la ecuación (3) satisface de forma aproximada la ecuación integrada de una EDO, es posible encontrar un término pequeño de perturbación de esa ecuación, tal que la expansión de y(u) satisfaga exactamente la ecuación dinámica perturbada.

El número de términos de perturbación depende del número de ecuaciones que no se cumplen, por el hecho de truncar la serie en el grado N al igualar término a término los coeficientes de la serie de Chebyshev resultante del montaje completo de las ecuaciones dinámicas.

Para determinar el grado en el que se desarrolla el polinomio de perturbación hay que fijarse en el polinomio de desarrollo de la serie. Veremos esto con más detalle al final del apartado 5.

4. DINÁMICA LONGITUDINAL PARA UN VEHÍCULO

La dinámica longitudinal viene descrita por la siguiente ecuación [7]:

$$m\cdot\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+K_a\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+K_1x+K_0+K_r+C_{f3}t^3+C_{f2}t^2+C_{f1}t+C_{f0}=0 \quad (4)$$

Donde:

m	Masa equivalente del vehículo, incluye el efecto de masas rotativas.
$K_a=\frac{1}{2}\cdot C_x\cdot A_f\cdot \rho$	Resistencia aerodinámica al avance
C_x	Coeficiente de resistencia aerodinámica.
A_f	Área frontal del vehículo
ρ	Densidad del aire
$K_r=m\cdot g\cdot f_r$	Resistencia a la rodadura
f_r	Coeficiente de resistencia a la rodadura
$P\cdot\sin(\alpha)\approx P\cdot\tan(\alpha)=P\frac{dy}{dx}=K_1\cdot x+K_0$	Resistencia gravitatoria asumiendo un perfil vertical parabólico en la carretera acorde con [8]
$C_{f3}t^3+C_{f2}t^2+C_{f1}t+C_{f0}$	Fuerza de frenado cualquiera descrita por una spline cúbica

5. DESARROLLO DE LA VELOCIDAD EN POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

El desarrollo en polinomios de Chebyshev para una EDO se puede realizar en velocidad, aceleración o desplazamiento. En nuestro caso, debido a la no linealidad para la velocidad, se ha decidido desarrollar los polinomios precisamente en este parámetro. Se toma por tanto el cambio de variable $v(t) = dx(t)/dt$

Como ya se comentó el desarrollo en polinomio de Chebyshev se debe definir para un dominio de $u\in\{-1,1\}$, si se quiere desarrollar entre un tiempo inicial t_{in} y un tiempo final de simulación t_{fin} , $\{t_{in},t_{fin}\}$ se debe hacer también la siguiente transformación a la variable:

$$t=b\cdot u+c=\frac{t_{fin}-t_{in}}{2}\cdot u+\frac{t_{fin}+t_{in}}{2} \quad (5)$$

Si $t_{in}=0$ entonces $c=b=t_{fin}/2 \Rightarrow t=(t_{fin}/2)\cdot u+t_{fin}/2=b\cdot u+b$ de tal manera que: $dt=b\cdot du=(t_{fin}/2)\cdot du$

Así definimos b como la constante de reducción del dominio del tiempo al dominio de u, por tanto para hacer el traslado al rango {-1,1} tenemos que obtener el valor de b como: $b=dt/du$

Para definir la aceleración y el desplazamiento hay que derivar e integrar respectivamente la serie de velocidades desarrollada en la ecuación (3). Siguiendo a Fox [2], se tiene por tanto la aceleración como la derivada de la velocidad de la forma:

$$\frac{d}{du}v(u) = \sum_{n=0}^{N}{}' C_n \left(\frac{n}{2\cdot\left(1-u^2\right)} \left(T_{n-1} - T_{n+1}\right) \right) \tag{6}$$

Despreciando $1/(2\cdot(1-u^2))$ cuando $u=\pm 1$, sustituyendo $(1-u^2) = (T_0-T_2)/2$ podemos escribir el término anterior como: $1/(2\cdot(1-u^2)) = 1/(T_0-T_2)$

$$\frac{d}{du}v(u) = \frac{1}{(T_0 - T_2)} \sum_{n=1}^{N} C_n \cdot n \cdot \left(T_{n-1} - T_{n+1}\right) \tag{7}$$

El desplazamiento será la integral de la velocidad, ver [2]:

$$\int v(u)du + D = \frac{C_0}{2}T_1 + \frac{C_1}{4}T_2 + \sum_{n=2}^{N} C_n \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}}{n+1} - \frac{T_{n-1}}{n-1} \right) + D \tag{8}$$

La incógnita D es la constante de integración en x, y se podrá conocer a partir de la condición inicial x(t=0) de tal manera que: $x_t(t=0) = b \cdot x_u(t=0) = b \cdot x_u(b \cdot u + c = 0)$

Con el cambio de variable que indica la ecuación (5) si $t_{in}=0$ se tiene que c = b, luego $x_t(t=0) = b \cdot x_u(u=-1) = b\,\left[\int V(u)du + D\right]_{(u=-1)} = b\,\left[\int V(u)du\right]_{(u=-1)} + b\,D$

Y por tanto:

$$D = \frac{1}{b} x_t(t=0) - \left[\int V(u)du\right]_{(u=-1)} \tag{9}$$

Como se puede ver en la ecuación (4) de la dinámica longitudinal aparece una no linealidad en el término que define la fuerza aerodinámica, es por ello que se debe calcular el cuadrado de la velocidad. Siguiendo a [2] se obtiene el cuadrado de la serie de Chebyshev:

$$\left(v(u)\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}{}' C_n^2 \left(T_0 + T_{2\cdot n}\right) + \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=n+1}^{N} \left(C_n \cdot C_m \cdot \left[T_{n+m} + T_{|n-m|} \right] \right) \right] \tag{10}$$

Una vez definidos los polinomios de Chebyshev de la velocidad, el desplazamiento y la aceleración se compone la ecuación diferencial completa desarrollada en serie de Chebyshev:

$$\begin{aligned} &\frac{m}{b}\cdot\left(\frac{1}{(T_0 - T_2)} \sum_{n=1}^{N} C_n \cdot n \cdot \left(T_{n-1} - T_{n+1}\right) \right) + \\ &+K_a\left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}{}' C_n^2 \left(T_0 + T_{2\cdot n}\right) + \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=n+1}^{N} \left(C_n \cdot C_m \cdot \left[T_{n+m} + T_{|n-m|} \right] \right) \right] \right) + \\ &+ b\cdot K_1\left(\frac{C_0}{2}T_1 + \frac{C_1}{4}T_2 + \sum_{n=2}^{N} C_n \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}}{n+1} - \frac{T_{n-1}}{n-1} \right) + D \right) + f(u) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Siendo $f(u)=C_{f3}(b\cdot u+c)^3+C_{f2}(b\cdot u+c)^2+C_{f1}(b\cdot u+c)+C_{f0}+K_0+K_r$, el término que incluye las resistencias a la rodadura, parte de la rampa y la fuerza de frenado.

Para calcular C_0 se plantea la ecuación de las condiciones iniciales, de tal manera que $v(u=-1)=V_0$

Resolviendo para un N=4 se obtiene la ecuación de C_0 en función del resto de constantes:

$$C_0 = 2\cdot V_0 - 2\cdot C_4 + 2\cdot C_3 - 2\cdot C_2 + 2\cdot C_1 \tag{12}$$

Utilizando la herramienta de cálculo simbólico MAPLE se agrupan las constantes que acompañan cada grado del polinomio de Chebyshev en u.

Una vez agrupada la serie en los Ti, para que sea nula la ecuación (11), deben ser idénticamente nulos todos los términos de la serie. Esto genera un sistema de ecuaciones no lineal en los Ci, cuya solución proporcionará la expansión en velocidad de la ecuación (3) que es solución aproximada de la ecuación diferencial no lineal (4).

No obstante, para mejorar la precisión, se utiliza el método tau de Lanczos que se ha presentado brevemente en el punto 3 y se puede revisar con más detalle en [2].

Efectivamente, al componer el sistema de ecuaciones anterior y agrupar los términos en u, por el hecho de truncar la serie en el grado N, las N+1 últimas ecuaciones no se cumplirán exactamente, ya que al elevar al cuadrado el polinomio de Chebyshev de grado N obtenemos un polinomio de grado 2N y el sistema queda con (2N)+1 ecuaciones y N incógnitas. Por tanto, al igualar término a término los coeficientes de la serie de Chebyshev, resultante del montaje completo de las ecuaciones dinámicas, se necesitarán N+1 términos para igualar el número de incógnitas al de ecuaciones. Se puede aplicar en ese caso la teoría de la perturbación para funciones racionales, desarrollando un polinomio de perturbación que añada dichos términos.

En el caso de N=4 el sistema tendrá 9 ecuaciones ($T_0 \ldots T_8$) y 4 incógnitas ($C_1 \ldots C_4$). Por tanto se necesitarán 5 términos de perturbación para mejorar la precisión.

El método τ de Lanczos dice que si la expansión finita satisface de forma aproximada la ecuación (4), es posible encontrar un término pequeño de perturbación de esa ecuación tal que la expansión de y(u), satisfaga exactamente la ecuación dinámica:

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{b}\cdot\left(\frac{1}{(T_0-T_2)}\sum_{n=1}^{N} C_n\cdot n\cdot\left(T_{n-1}-T_{n+1}\right)\right)+\\
&+K_a\left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}{}' C_n^2\left(T_0+T_{2\cdot n}\right)+\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=n+1}^{N}\left(C_n\cdot C_m\cdot\left[T_{n+m}+T_{|n-m|}\right]\right)\right]\right)+\\
&+b\cdot K_1\left(\frac{C_0}{2}T_1+\frac{C_1}{4}T_2+\sum_{n=2}^{N} C_n\frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}}{n+1}-\frac{T_{n-1}}{n-1}\right)+D\right)+f(u)=E(u)
\end{aligned} \tag{13}$$

donde $E(u)=\tau_1 T_n(u)+\tau_2 T_{n+1}(u)+\tau_3 T_{n+2}(u)+\tau_4 T_{n+3}(u)+\tau_5 T_{n+4}(u)$

es el término de perturbación.

6. DATOS DE SIMULACIÓN

Veamos un ejemplo numérico con los siguientes parámetros:

m=1200 kg; K_a = 0.5 Ns^2/m^2; K_r = 117.72 N; K_1 = -6.1687 N/m; K_0 = 706.32 N

Las condiciones iniciales serán: *V_0 = 50 m/s; y_0 = 0.*

Dichos valores se han tomado con el mismo orden de magnitud que tendrían en un vehículo real, pero no se corresponden con un modelo concreto.

Se simulan 2 segundos y se excita el modelo con una acción de frenado muy violenta en función del tiempo, que generará mayor error en los resultados que un frenado suave. Para definir dicha acción de frenado se ha tomado como ejemplo la spline cúbica siguiente:

$$Ff = 12238 \cdot t^3 - 40010 \cdot t^2 + 32045 \cdot t + 1078 \tag{14}$$

7. SOLUCIÓN DEL SISTEMA PERTURBADO Y COMPARACIÓN CON LA SOLUCION NUMERICA

Las soluciones obtenidas para las constantes de Chebyshev y los términos de perturbación son las siguientes:

$$solucion = \begin{bmatrix} C_0 = 88.6789, C_1 = -5.0239,\ C_2 = 1.1757,\ C_3 = 0.2198, C_4 = -0.3193, \\ \tau_1 = 14.5347,\ \tau_2 = -1.1283, \tau_3 = 0.1757,\ \tau_4 = 0.0351,\ \tau_5 = -0.0255 \end{bmatrix}$$

Por tanto el polinomio de Chebyshev, solución de la velocidad, obtenido es:

$$y(u) \approx \sum_{n=0}^{N}{}' C_n T_n(u) = 44.3394 \cdot T_0(u) - 5.0239 \cdot T_1(u) + 1.1757 \cdot T_2(u) + 0.2198 \cdot T_3(u) - 0.3193 \cdot T_4(u) \tag{15}$$

A continuación se deshace el cambio de variable t=b·u, volviendo al dominio del tiempo y se asigna a cada $T_i(t)$ su polinomio correspondiente. Finalmente expresando los polinomios en forma normal tendremos:

$$\begin{aligned} x(t) &= -0.5109\ t^5 + 2.7744\ t^4 - 4.3529\ t^3 - 1.3199\ t^2 + 50\ t \\ v(t) &= -2.5546\ t^4 + 11.0975\ t^3 - 13.0587\ t^2 - 2.6398\ t + 50 \\ a(t) &= -10.2185\ t^3 + 33.2926\ t^2 - 26.1174\ t - 2.6398 \end{aligned} \tag{16}$$

Las tres ecuaciones anteriores son soluciones analíticas aproximadas para este ejemplo, a la ecuación diferencial no lineal que describe la dinámica longitudinal del vehículo. Se muestra en las figuras 1-3 el error respecto de la integración numérica para N=4.

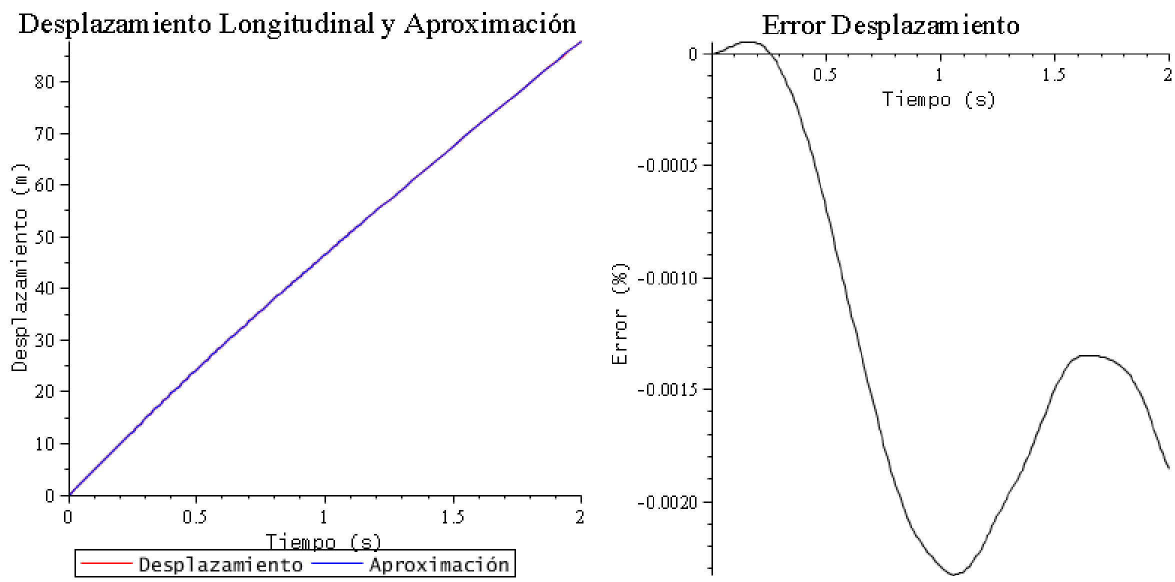

Figura 1. Desplazamiento y aproximación en serie de Chebyshev, y su error relativo.

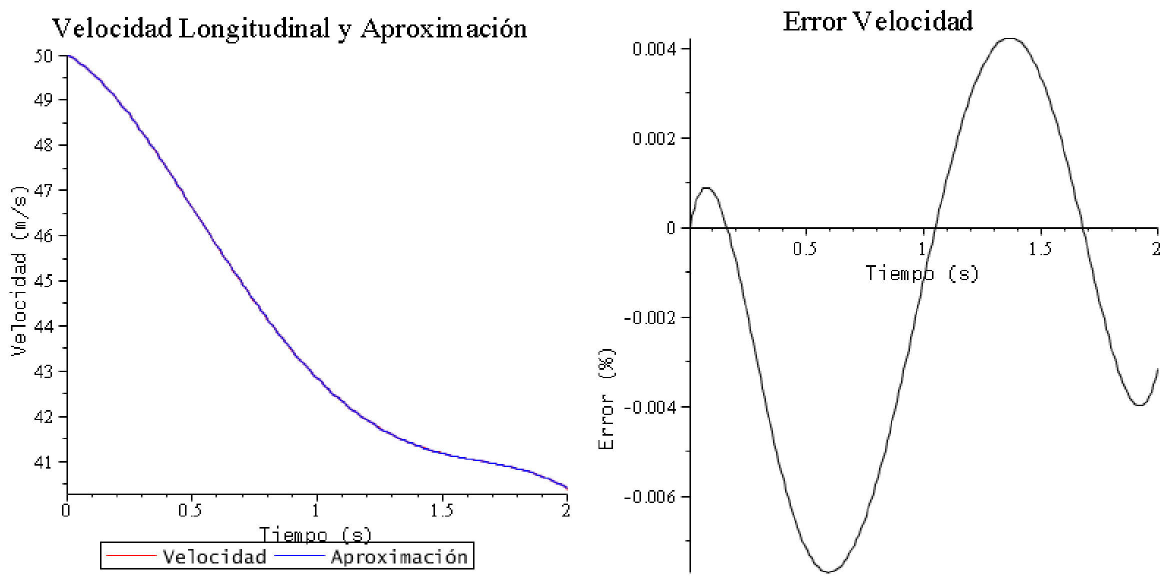

Figura 2. Velocidad y aproximación en serie de Chebyshev, y su error relativo.

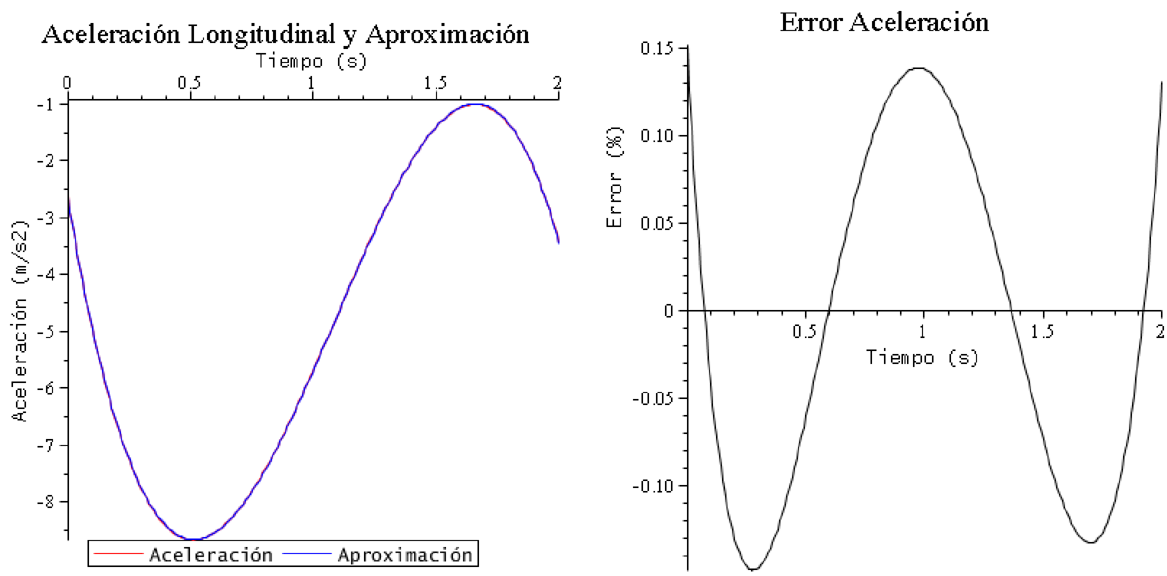

Figura 3. Aceleración y aproximación en serie de Chebyshev, y su error relativo.

Si se comparan los errores relativos máximos (error absoluto máximo dividido por el máximo valor absoluto de la función) para distintos grados de los polinomios de Chebyshev se obtienen los siguientes resultados:

	N=3	**N=4**
Error relativo max a (%)	**40**	**0.15**
Error relativo max v (%)	**2.5**	**0.008**
Error relativo max x (%)	**1.1**	**0.0023**

Tabla 1. Comparativa del error relativo máximo para la aceleración, la velocidad y el desplazamiento

8. CONCLUSIÓN

Se muestra un método para la obtención de soluciones polinomiales aproximadas a la ecuación diferencial no lineal que describe la dinámica longitudinal de un vehículo, mediante desarrollo en polinomios de Chebyshev en el entorno de las condiciones iniciales.

El procesamiento de estas soluciones es enormemente eficiente desde un punto de vista computacional, puesto que son polinomios de grado bajo (N=4). Y el error máximo es muy reducido (0.008% para velocidad y 0.0023% para desplazamiento).

Se ha realizado el análisis del error en función del grado del polinomio.

Aunque el método propuesto y las expresiones conseguidas se han aplicado a una ecuación de dinámica longitudinal, la metodología utilizada es válida para sistemas de ecuaciones diferenciales más complejos, siempre y cuando se trabaje en valores próximos al punto de expansión para mantener un error moderado con polinomios de grado bajo.

9. REFERENCIAS

[1] A. López, P. Vélez, C. Moriano, *Método de procesamiento rápido de las ecuaciones de la dinámica vehicular mediante polinomios de Chebyshev*, Encuentro Internacional de Algebra Computacional EACA, Sevilla, España, (2006).

[2] L. Fox, I. B. Parker, *Chebyshev polynomials in numerical analysis*. Oxford University Press, (1968).

[3] S. A. Sarra, *Chebyshev Interpolation: An Interactive Tour*, Journal of Online Mathematics and Its Applications, 6, Article ID 1297, (2006).

[4] C. W. Clenshaw, A. R. Curtis, *A method for numerical integration on an automatic computer*, Numerische Mathematik, 2, 1 (1960), 197-205.

[5] J. Waldvogel, *Fast construction of the Fejér and Clenshaw-Curtis quadrature rules*, BIT Numerical Mathematics, 46 (2006) 195-202.

[6] C. Lanczos, *Applied Analysis*, Prentice-Hall New York, Pitman London (1957).

[7] F. Aparicio, C. Vera, V. Díaz, *Teoría de vehículos automóviles*, Sección de Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Universidad Politécnica de Madrid, (1995).

[8] Norma 3.1-IC 'Trazado'. MOPU-Ministerio de Obras Públicas.