

Aproximación polinomial de la fórmula mágica

A. López Rosado, C. Moriano Sánchez, R. Álvarez Fernández

Dpto. de Ingeniería Industrial. Universidad Nebrija
cmoriano@nebrija.es

El modelo de neumático de Pacejka describe la fuerza de frenado, fuerza lateral y par autoalineante en términos de deslizamiento longitudinal y ángulo de deriva como un modelo de neumático semiempírico descrito con la denominada fórmula mágica. En el presente trabajo se muestra un conjunto de aproximaciones polinomiales y racionales a dicha fórmula. Para obtenerlas se utiliza la teoría de aproximación y se comparan funciones racionales (RA) obtenidas mediante el algoritmo de Rémez, desarrollos en serie de polinomios de Chebyshev (ACh), en serie de polinomios racionales de Chebyshev (ARChP), en serie de funciones ortogonales racionales (ORF) y en series ARChP obtenidos a partir de ORFs de grado 1, estas últimas resultan ser los desarrollos que muestra una convergencia más rápida y eficientes computacionalmente. Para complementarlas se han obtenido aproximaciones en polinomios racionales de Jacobi, ya que permiten un ajuste fino del error en zonas determinadas de la curva. Además se han obtenido modelos para incluir la influencia de la carga vertical. Como conclusión de todo ello se propone una formulación polinomial sustitutiva que se puede utilizar con grado 3 para el cálculo de esfuerzos longitudinales y laterales con un error del 1% respecto de la fórmula original de Pacejka, pero que se procesa unas 20 veces más rápido, se puede integrar y derivar fácilmente y sus coeficientes pueden ser obtenidos a partir de ensayos de manera sencilla mediante algoritmos convencionales de mínimos cuadrados.

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo presenta formulaciones más eficaces desde el punto de vista computacional para el modelo de neumático de Pacejka [1].

Ya se estudió en [2] un ejemplo de desarrollo en serie de potencias de un modelo sencillo de dinámica longitudinal para un vehículo. Dichas expresiones polinomiales permiten un cálculo muy rápido de las ecuaciones dinámicas en tiempo real. Con el uso de herramientas de cálculo simbólico (MAPLE) se consigue pre calcular respuestas en función de las entradas al modelo de manera muy sencilla.

La necesidad de obtener también formulaciones sencillas y precisas para poder integrar el modelo de neumático en el modelo dinámico anterior condujo a una primera publicación [3] en la línea del presente artículo, en la que se desarrollaban aproximaciones RA, ACh y ARChP para esfuerzos longitudinales, así como aproximaciones bivariantes a la fórmula mágica.

Ahora se completa y generaliza este trabajo a partir de la teoría de funciones ortogonales racionales, con desarrollos ORF y ARChP a partir de ORF's. Se añaden también desarrollos de polinomios de Jacobi que permiten un ajuste exacto de los desplazamientos en el origen y del error en distintas zonas de la curva.

2. REVISIÓN TEÓRICA

La aproximación de una función en serie de Chebyshev (ACh) puede ser estudiada en [4]. Este desarrollo converge habitualmente más rápido que en serie de potencias. Sus coeficientes pueden ser evaluados por integración directa en algunas funciones, pero en general esto no es posible y se debe aproximar su integral mediante alguna fórmula de cuadratura. MAPLE, tras analizar las singularidades, utiliza algoritmos de cuadratura de Clenshaw-Curtis [5,6]. Si no se obtiene un buen resultado se utilizan fórmulas de Newton-Cotes adaptativas. Todo ello se realiza en la función Chebpade de la librería de

aproximación de funciones Numapprox de MAPLE. Con la librería Orthopoly se pueden calcular y manipular los polinomios de Chebyshev.

En caso de tener una función que varíe de forma rápida en algunas regiones y en otras no las aproximaciones mediante funciones racionales (RA) son más eficientes; como ocurre en el comportamiento de un neumático, especialmente en esfuerzo longitudinal.

La aproximación de Padé permite obtener expresiones racionales con numerador y denominador desarrollados en series de potencias. Los desarrollos de Chebyshev-Padé permiten obtener expresiones racionales más compactas y exactas. La librería Numapprox de MAPLE también implementa aproximaciones racionales mediante su función Chebpade. Con ello se obtienen buenas aproximaciones pero no las que presentan mínimo error máximo (llamadas minimax). Para encontrar éstas se utiliza el algoritmo de Remez [7], que parte de la aproximación de Chebyshev-Padé, afina el resultado mediante iteraciones numéricas y converge a una mejor aproximación minimax.

El algoritmo de Remez produce resultados óptimos en la aproximación de funciones racionales y polinomiales. Permite calcular el mínimo error de cualquier función $f(t)$, ponderada con algún término de peso $w(t)$. La aproximación minimax con polinomios de grado n en el numerador y m en el denominador, requiere $(n+m)$ sumas y $(n+m)$ multiplicaciones para su evaluación y la denotaremos como aproximación minimax $[n,m]$. En [8] podemos ver cualquiera de estos métodos.

En MAPLE el algoritmo de Remez está implementado mediante la función minimax incluida en la librería de aproximación de funciones Numapprox.

Más recientes trabajos [9,10] muestran la idoneidad de utilizar desarrollos en serie polinomios racionales de Chebyshev (ARChP). Dichos polinomios heredan las propiedades de los polinomios de Chebyshev, también son ortogonales en el intervalo $\{-1,1\}$. Sin embargo al variar nuestras variables independientes (deslizamiento K y ángulo de deriva α) entre $\{0,100\}$ y $\{-15^\circ,15^\circ\}$ respectivamente (denominamos genéricamente sus puntos de inicio y final como x_{in} y x_{fin}), no se puede realizar el desarrollo en serie de Chebyshev sobre dichas variables originales, ya que su dominio excede el rango de ortogonalidad de los polinomios de Chebyshev, luego tendremos que utilizar polinomios en v desplazados [4] mediante un cambio de variable al dominio de u que sí varía entre $\{-1,1\}$. Se ha realizado por tanto una doble transformación, del dominio de x a v , y del dominio de v al de u . Se aproxima la función en el dominio de u mediante desarrollo en serie de Chebyshev y sobre esa función aproximada se deshacen las dos transformaciones para obtener la función aproximada en el dominio inicial de la variable independiente.

3. Funciones ortogonales racionales (ORF)

Siguiendo a Bultheel [11], si $A=\{a_1,a_2,\dots\}$ es una secuencia de números reales diferentes de cero, el espacio vectorial lineal de funciones racionales de grado n , con polos en $\{a_1,\dots,a_n\}$ se define mediante el espacio de funciones $L=\{b_0,b_1,\dots,b_n\}$, donde las funciones de base vienen definidas por:

$$b_k(x) = x \cdot \overline{(1-x\bar{a}_k)} \cdot b_{k-1}(x), \quad b_0(x) = 1; \quad \bar{a}_k = \frac{1}{a_k} \quad (1)$$

Si ortonormalizamos y asumimos un intervalo en la recta real, fuera del cual se encuentran todos los polos, entonces esas funciones satisfacen la relación de recurrencia:

$$\varphi_n(x) = \left(E_n x \overline{(1-x\bar{a}_n)} + F_n \overline{(1-x\bar{a}_{n-1})(1-x\bar{a}_n)} \right) \varphi_{n-1}(x) - \frac{E_n}{E_{n-1}} \frac{(1-x\bar{a}_{n-2})}{(1-x\bar{a}_n)} \varphi_{n-2}(x) \quad (2)$$

Van Deun [12] obtiene los coeficientes de la relación de recurrencia (E_n, F_n) para el caso de funciones ORF de Chebyshev, que son las que tienen funciones de peso de Chebyshev. Se

denomina función de peso de Chebyshev a una función de peso de Jacobi con valores de $\delta=\pm 1/2$ y $\gamma=\pm 1/2$.

Al introducir la transformación de Joukowski, Van Deun obtiene los coeficientes:

$$E_n = 2 \frac{\sqrt{(1-\beta_{n-1}^2)(1-\beta_n^2)(1-\beta_{n-1}\beta_n)}}{(1+\beta_{n-1}^2)(1+\beta_n^2)} \quad (3)$$

$$F_n = -\sqrt{\frac{1-\beta_n^2}{1-\beta_{n-1}^2}} \frac{(1-\beta_{n-1}^2)(\beta_n+\beta_{n-2})+2\beta_{n-1}(1-\beta_n\beta_{n-2})}{(1+\beta_n^2)(1-\beta_{n-1}\beta_{n-2})}$$

4. Desarrollo en serie de ORF's

La mejor aproximación, bajo el criterio de mínimos cuadrados, que se obtiene al truncar el desarrollo en serie de funciones ortogonales $F(x)$ (de cualquier tipo), de una función $f(x)$ se puede estudiar en [13], toma la forma siguiente:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j F_j(x) \quad (4)$$

La comilla indica que el primer término está dividido por 2. Los coeficientes toman el valor:

$$a_j = \frac{1}{r_j} \int_{x_1}^{x_2} w(x) \cdot f(x) \cdot F_j(x) dx \quad (5)$$

$$r_j = \int_{x_1}^{x_2} w(x) \cdot [F_j(x)]^2 dx$$

En este caso particular las $F_j(x)$ son ORF. El valor de r_j representa la norma de la función ORF y para funciones ORF con función de peso de Chebyshev toma valor constante $r_j = \pi$.

MAPLE no soporta ninguna función relacionada con ORF's, ni para su generación ni para el desarrollo de funciones.

Dentro de las familias de polinomios ortogonales clásicos, generados a partir de la ecuación diferencial de Sturm-Liouville, de la que derivan también los polinomios de Chebyshev, consideramos ahora los polinomios de Jacobi [14]. Que vienen controlados por dos parámetros (δ y γ) y que permiten elegir la zona de mejor aproximación en el intervalo de ortogonalidad. En la práctica, esto es interesante porque permitirá ajustar mejor el error en una zona u otra de las curvas de esfuerzo longitudinal, lateral o momento autoalineante, en función de la aplicación en la que utilicemos la aproximación, por ejemplo buscando error más reducido en valores de deslizamiento cercanos a cero, o bien en valores próximos al máximo esfuerzo o en el punto de deslizamiento máximo (100%).

La norma r_j en polinomios de Jacobi, no es constante, sino que es función también de γ , δ y del grado del polinomio n :

$$r_j = \frac{2^{\delta+\gamma+1} \Gamma(n+\delta+1) \cdot \Gamma(n+\gamma+1)}{n! \cdot (2 \cdot n + \delta + \gamma + 1) \cdot \Gamma(n+\delta+\gamma+1)} \quad (6)$$

También se pueden computar y manipular los polinomios de Jacobi utilizando la librería Orthopoly de MAPLE. El desarrollo de una función en serie de polinomios de Jacobi utiliza la misma ecuación 4, pero utilizando ahora la función de peso de Jacobi. En este caso la

integral debe programarse en MAPLE. No está disponible una librería para desarrollos de funciones en serie de Jacobi.

5. Fórmula mágica

El modelo de Bakker, Nyborg and Pacejka es un modelo semi-empírico del neumático basado en la denominada fórmula mágica.

$$Y = D \cdot \sin\left[C \cdot \arctan\left(B \cdot X - E \cdot \left[B \cdot X - \arctan(B \cdot X)\right]\right)\right] \quad (7)$$

Donde la forma de la curva vienen determinadas por los parámetros B, C, D y E.

La ecuación puede calcular:

- Fuerza lateral en el neumático F_y en función del ángulo de deslizamiento α (en grados)
- Fuerza de frenado F_x como función del deslizamiento longitudinal K (en %)
- Momento autoalineante M_z como función del ángulo de deslizamiento α .

Podemos estudiarlo más a fondo en [1, 15, 16].

6. APROXIMACIONES A LA FÓRMULA MÁGICA

En este trabajo de investigación se han realizado los siguientes desarrollos en serie de la fórmula mágica RA, ACh, ARChP y ARChP de funciones ORF. Se ha visto que estos últimos son los que presentan una convergencia más rápida en la serie. Las expansiones del tipo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n^s\left(\frac{x}{x+b}\right) \quad (8)$$

Presentan errores muy bajos respecto de la fórmula original, con grados de polinomios bajos ($n=3$). b es una constante para cada neumático y tipo de esfuerzo. Se obtiene entonces un $\text{ErrorRel} < 1\%$ (error relativo) en los desarrollos siguientes:

- $n \geq 4$ con $b = 4$ para F_x con $0 \leq x \leq 100$ y $0 \leq F_z \leq 8 \text{ kN}$
- $n \geq 4$ con $b = 4$ para F_y con $0 \leq \alpha \leq 15$ y $0 \leq F_z \leq 8 \text{ kN}$
- $n \geq 9$ con $b = 3.5$ para M_z con $0 \leq \alpha \leq 15$ y $0 \leq F_z \leq 8 \text{ kN}$

Los valores de b indicados, garantizan un $\text{ErrorRel} < 1\%$ para $0 \leq F_z \leq 8 \text{ kN}$. Pero se puede mejorar el error en cada valor individual de F_z , modificando ligeramente b . Por ejemplo en F_x , para valores $4 \leq F_z \leq 7 \text{ kN}$ se tiene $n \geq 3$ con $\text{ErrorRel} < 1\%$. Estos resultados son excelentes.

Adicionalmente al comparar los tiempos de cómputo respecto de la formulación original, se ve que esta expresión se procesa unas 20 veces más rápido.

Para ilustrar todo ello (figura 1) hemos realizado la siguiente simulación:

Datos:

- $F_z = 6 \text{ kN}$ (constante); $b = 4$
- $C = 1.65$; $D = 6097.2$; $B = 0.2064$; $E = 0.606$; $BCD = 2076.600$
- $a_1 = -21.3$; $a_2 = 1144$; $a_3 = 49.6$; $a_4 = 226$; $a_5 = 0.69e-1$; $a_6 = -0.6e-2$; $a_7 = 0.56e-1$; $a_8 = .486$
- $x_{in} = 0$; $x_{fin} = 100$; $v_{in} = 0$; $v_{fin} = 100/104$

Ecuación original (Fórmula mágica): $F_x = 6097.2 \sin\left[1.65 \cdot \arctan\left(0.0813 X + 0.606 \arctan\left[0.2064 X\right]\right)\right]$

Aproximación:

$$F_x = 3557.1888 \cdot T^s(0, v) + 2587.3377 \cdot T^s(1, v) - 1536.3996 \cdot T^s(2, v) - 515.9311 \cdot T^s(3, v)$$

siendo : $T^s(n, v) = T(n, (52/25) \cdot v - 1)$

Y en forma normal de Horner: $F_{xap} = -50.61 + (8506.27 + (13491.33 - 18571.27 \cdot v) \cdot v) \cdot v$

siendo : $v = x/(x + 4)$. Veamos las curvas resultantes:

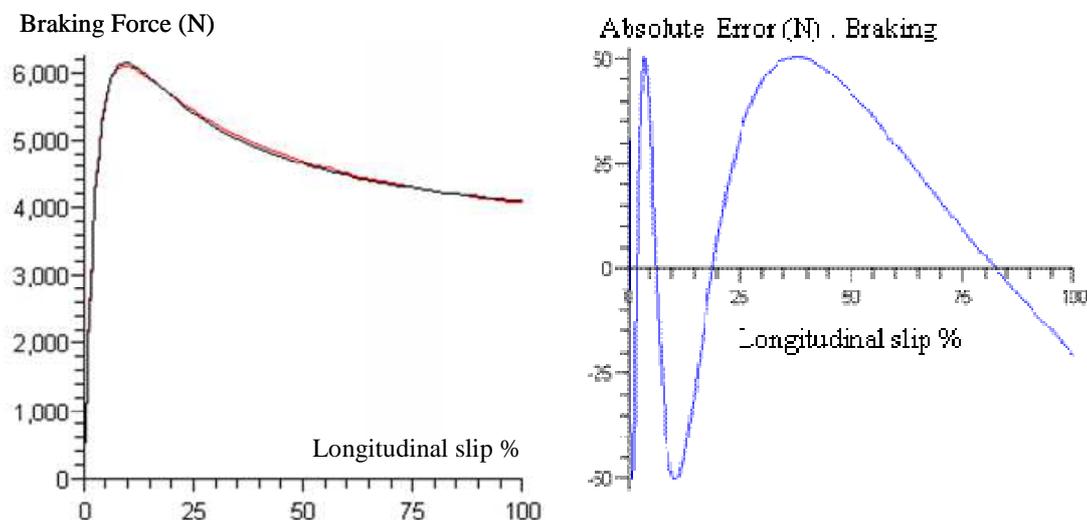


Figura 1. Fuerza de frenada (N) frente a deslizamiento longitudinal en serie de Chebyshev de la función racional $x/(x+b)$, y su error absoluto (N)

Si hacemos desarrollos en x para distintos valores de F_z , buscamos el óptimo de b en cada caso y calculamos la regresión de $b=f(F_z)$ se puede acelerar algo más la convergencia, en el caso del neumático ejemplo podemos obtener:

- $n \geq 3$ con $b = 5.4629 - 0.2829 \cdot F_z$ para F_x con $0 \leq x \leq 100$ y $0 \leq F_z \leq 8$ kN

Utilizando las expresiones de las aproximaciones en serie de polinomios racionales de Jacobi se puede partir de los valores $\delta = -1/2$ y $\gamma = 1/2$ correspondientes a la función de peso de Chebyshev (que es un caso particular de Jacobi). A partir de ahí el incremento de ambos reduce el error en la zona central de la curva y lo aumenta en los extremos. También se puede ajustar el error a cero en los extremos, manteniendo fijo uno de los dos parámetros y variando el otro, conservando los valores de error máximo prácticamente constantes en el conjunto de la curva. Esto nos va a permitir ajustar por ejemplo, el valor de los desplazamientos en el origen a los valores S_v y S_h indicados en [1, 15, 16].

Vemos como ejemplo el mismo neumático anterior con $F_z = 6$ kN, en el que se muestra un ajuste con error nulo en el origen ($S_v = S_h = 0$), obtenido con los valores $\delta = -1/2$ y $\gamma = -0.4685/2$. La aproximación resultante (con $b = 3.85$) es: $F_{xap} = (7369.26 + (15916.3 - 19867.52 \cdot v)v)v$

$$\text{siendo : } v = x/(x + 3.85) \quad (9)$$

La curva de error tiene un aspecto muy similar a la de la figura 1, también entre ± 50 N, pero con error nulo en el origen.

Podríamos ajustar así el error nulo en el final de la curva o en su máximo si nos interesara. También se podría ajustar la pendiente en el origen (valor BCD en la fórmula de Pacejka), hasta su valor exacto o con un error moderado, manteniendo valores globales de error máximo también del orden del 1%. Por ejemplo, la aproximación ($\delta = -0.16$ y $\gamma = -0.68$, $b = 3.85$): $F_{xap} = -62.86 + (7904.7 + (14744.57 - 19130.3 \cdot v)v)v$ con la misma v (ecuación 9).

Obteniendo por tanto una pendiente en el origen $BCD_{ap}=2053$ frente a $BCD_{original}=2076$ (Error=1.1 %). Un valor de pico aproximado $D_{ap}=6135$ frente a $D_{original}=6097$ (Error=0.6 %) Con un error máximo global de 67N (Error=1,09 %). En las aproximaciones de la forma:

$$F_{ap} = A_0(A_1 + (A_2 - A_3 \cdot v)v)v; \text{ siendo : } v = x/(x + b) \tag{10}$$

A_1/b , sería el valor de la derivada en el origen (BCD)

7. DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES A PARTIR DE ENSAYOS

La ecuación 10 anterior es un polinomio, y es fácil obtener los coeficientes A_i desde ensayos en banco mediante los algoritmos convencionales de mínimos cuadrados. Para ello, debemos previamente transformar los datos desde la variable original, por ejemplo deslizamiento, a la variable transformada $v=x/(x+b)$. Veamos un ejemplo:

Datos de deslizamiento (%) (22 valores simulados): [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 13, 17, 21, 25, 31, 37, 43, 49, 58, 68, 78, 88, 100].

Fuerza longitudinal F_x (22 valores simulados): [-55.6, 1264.3, 2239.6, 2937.4, 3464.3, 3838.4, 3980.0, 4095.6, 4278.3, 4176.5, 4125.3, 3915.4, 3824.9, 3686.0, 3492.6, 3446.6, 3357.7, 3213.7, 3199.7, 3031.9, 3043.7, 2878.3].

Valor óptimo de $b = 4.195$.

Deslizamiento transformado: ($v=x/(x+4,195)$): [0, 0.1925, 0.3228, 0.4170, 0.4881, 0.5438, 0.5885, 0.6253, 0.6821, 0.7560, 0.8021, 0.8335, 0.8563, 0.8808, 0.8982, 0.9111, 0.9211, 0.9326, 0.9419, 0.9490, 0.9545, 0.9597].

Regresión de mínimos cuadrados: curva 3:

$$F_{xap} = -47.9487 + (4917.92 + (-13916.4 + 11471.01 \cdot v)v)v$$

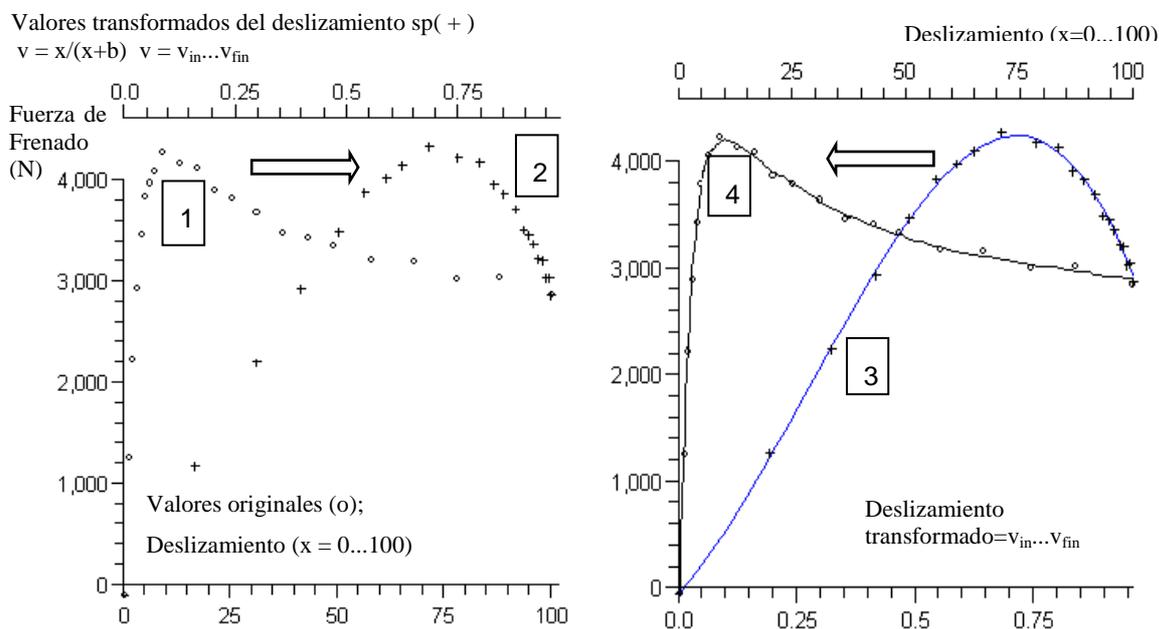


Figura 2. Transformación de los datos de deslizamiento

8. INFLUENCIA DE LA CARGA VERTICAL

Se puede aproximar la influencia de la carga vertical a partir de la curva de aproximación F_{ap1} (obtenida para 1kN normalizando la ecuación 10), añadiendo el factor de pico D coincidente con el de la fórmula original, que dará el valor máximo aproximado en cada carga, y otro de forma F_s ; y considerando el coeficiente lineal como representativo de la rigidez en el origen. Los tres varían en función de la carga vertical F_z (en kN).

Se calcula la regresión con los valores óptimos de F_s y A_1' para cada valor de carga normal.

$$F_{xap} = D(A_1' + (A_2' - A_3' \cdot v)v); \text{ siendo } v = \frac{x}{x + F_s}; A_2' = \frac{A_2}{D_1}; A_3' = \frac{A_3}{D_1} \quad (11)$$

Vemos un ejemplo de esfuerzo de frenado de grado 3, con un error máximo del 1.1% respecto de la formulación original para $1\text{kN} \leq F_z \leq 8\text{kN}$:

Se ajusta a partir de la aproximación de Jacobi con $F_z=1$:

- $\delta = -1/2$; $\gamma = -1.98/2$
- $b = 5.5$: $A_1 = 1249$; $A_2 = 3191$; $A_3 = -3828$
- $A_2' = 2.842$; $A_3' = -3.409$
- Factor de pico D , original de la fórmula mágica: $D = a_1 F_z^2 + a_2 F_z$; $a_1 = -21.3$; $a_2 = 1144$
- $D_1 = D(F_z=1) = 1122.7\text{N}$

El factor de curvatura aproximado que produce error mínimo:

$$E_{ap} = 5.956 - 0.5181 F_z + 0.0255 F_z^2$$

El factor de rigidez aproximado que produce error mínimo:

$$A_1' = -0.00102906 F_z^2 + 0.0092337 F_z + 1.104$$

La pendiente en el origen sería $D A_1'/F_s$. La figura 3 muestra el error en esta aproximación.

Si se parte del valor BCD original de la fórmula mágica para calcular $A_1' = F_s \text{BCD}/D$ se aprovechan los datos existentes para ese coeficiente, pero el error entonces se triplicaría aproximadamente.

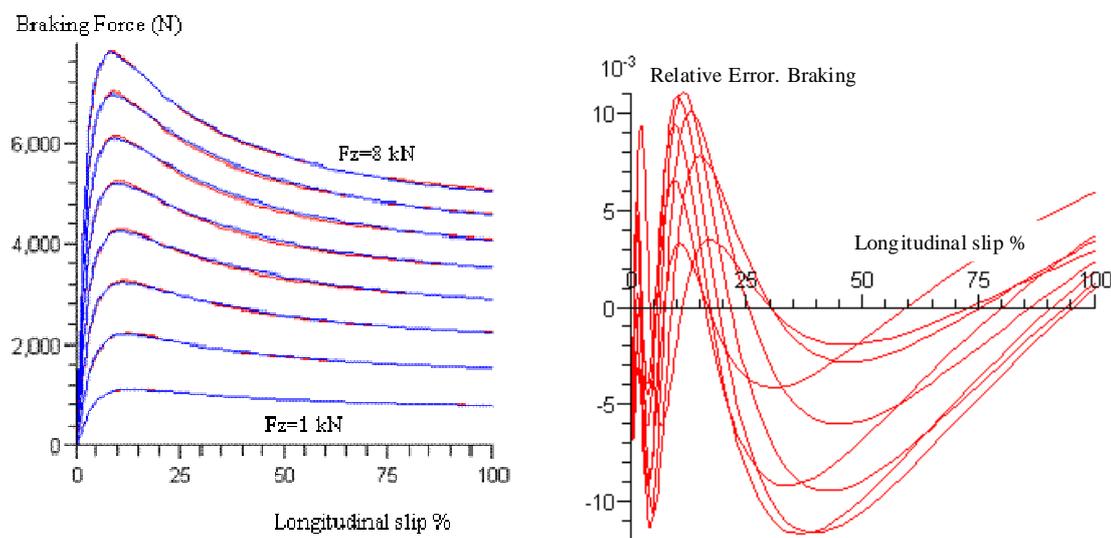


Figura 3. Fuerza de frenado frente al deslizamiento longitudinal para carga vertical variable ($1\text{kN} \leq F_z \leq 8\text{kN}$) y su error relativo

9. CONCLUSIÓN

Del análisis de los diferentes tipos de aproximaciones a la fórmula mágica que se han estudiado, con F_z constante, se propone en general y a efectos de cómputo eficiente, con buena precisión, el uso de expresiones del tipo:

$$F_{ap} = \sum_{n=0}^N A_i \cdot v^n ; \text{ siendo } v = \frac{x}{x + b} \quad (12)$$

obtenidas mediante desarrollos en serie de Polinomios racionales de Jacobi desplazados, pues convergen a errores relativos del orden del 1% con grado bajos (3 o 4), su error se pueden ajustar en las zona de la curva que interese de manera flexible, en particular en el origen.

Adicionalmente esta expresión se puede derivar e integrar analíticamente de forma sencilla, cosa que en la formulación original de Pacejka es imposible. Si el desarrollo es de grado 3, se puede también calcular la abscisa del valor máximo analíticamente de forma sencilla. Si se busca la máxima precisión, para un valor de F_z constante, entonces se recomienda utilizar aproximaciones racionales Minimax-Remez.

Las técnicas descritas, que utilizan el estado del arte en teoría de aproximación de funciones, junto con el uso de programas de cálculo simbólico (MAPLE), pueden permitir una obtención automatizada de los coeficientes A_i a partir de resultados de ensayos en banco mediante los métodos convencionales de mínimos cuadrados.

Se pueden obtener de forma sencilla, como hemos visto expresiones de F_x en función de la carga normal F_z , de forma similar a como lo hace la formulación original de Pacejka.

10. REFERENCIAS

- [1] E. Bakker, L. Lidner, H. B. Pacejka, *A new tire model with an application in vehicle dynamics studies*, SAE Technical Paper Series, Paper No 890087 (1989), 439-452.
- [2] A. López, P. Vélez, C. Moriano, *Método de procesamiento rápido de las ecuaciones de la dinámica vehicular mediante polinomios de Chebyshev*, Encuentro Internacional de Álgebra Computacional EACA, Sevilla, España, (2006).
- [3] A. López, P. Vélez, C. Moriano, *Bivariate Chebyshev expansion of the Pacejka's tyre model*, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM, Corfú, Grecia, (2007).
- [4] L. Fox, I. B. Parker, *Chebyshev polynomials in numerical analysis*, Oxford University Press. (1968).
- [5] C.W. Clenshaw, C.W. Curtis, *A method for numerical integration on an automatic computer*, Numerische Mathematik, 2 (1960), 187-205.
- [6] J. Waldvogel, *Fast construction of the Fejer and Clenshaw-Curtis quadrature rules*, BIT Numerical Mathematics, 46 (2006), 195-202.
- [7] E. Y. Remez, *Sur la détermination des polynômes d'approximation de degré donnée*, Comm. Soc. Math. Kharkov, 10 (1934), 41-63.
- [8] M. J. D. Powell, *Approximation theory and methods*, Cambridge University Press. (1981).
- [9] B. Guo, J. Shen, Z. Wang, *Chebyshev rational pseudospectral methods on a semi-infinite interval*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 53 (2002), 65-84.
- [10] T. W. Tee, *An adaptive rational spectral method for differential equations with rapidly varying solutions*, Tesis Doctoral, Univ. of Oxford, Oxford, (2006).
- [11] A. Bultheel, P. González Vera, E. Hendriksen, O. Njastad, *Orthogonal rational functions. Volume 5 of Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*, Cambridge University Press, (1999).
- [12] J. Van Deun, A. Bultheel, P. González Vera, *On computing rational Gauss-Chebyshev quadrature formulas*, Mathematics of Computation, 75 (2005), 307-326.
- [13] R. L. Burden, D. Faires, *Numerical analysis*, J. Ed. Thomson, (1998).
- [14] V. Totik, *Orthogonal polynomials*, Approximation Theory, 1 (2005), 70-125.
- [15] H. B. Pacejka, *Tire and vehicle dynamics*, SAE, (2002).
- [16] E. Bakker, L. Nyborg, H. B. Pacejka, *Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies*, SAE Technical Paper Series, Paper No 870421 (1987), 1-15.