

# Diseño optimizado por minimización de las tensiones localizadas en una placa plana con orificio circular y cambio de ancho sometida a carga axial

R. Ame<sup>(1)</sup>, D. Lezama<sup>(1)</sup>

(1) Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Lomas de Zamora. Argentina  
ingricardoame@gmail.com

---

*Por la necesaria existencia de discontinuidades geométricas derivadas de su funcionalidad, muchas veces coincidentes, los componentes mecánicos presentan puntos con tensiones localizadas de valor superior a la nominal. Los textos no ofrecen información fehaciente que vincule la magnitud de esas tensiones con las discontinuidades geométricas combinadas. En lo que respecta a placas planas sometidas a carga axial constante, algunos investigadores han obtenido la distribución de tensiones en aquellas con varios orificios circulares o para placas con cambio de ancho. El diseño debe estar dirigido a reducirlas, y en algunas oportunidades, reubicando adecuadamente una de las discontinuidades, sin afectar su funcionalidad, se obtiene un efecto aliviador de las tensiones localmente elevadas. El objetivo del presente trabajo es determinar las variaciones de las tensiones en una placa plana como componente mecánico, sometido a carga axial constante, cuyo diseño incluye una perforación central coincidente con un cambio de ancho. Los resultados obtenidos indican que las tensiones, si bien más elevadas que la nominal, disminuyen cuando ambas discontinuidades coinciden en la misma sección, lo que permite plantear la hipótesis: "las discontinuidades geométricas combinadas, coincidentes en una misma sección transversal, en placas delgadas sometidas a cargas axiales, generan valores bajos de tensiones concentradas, respecto de otras ubicaciones relativas no coincidentes en la misma sección transversal".*

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los componentes de máquinas se diseñan con las formas adecuadas a su función específica. La gran mayoría de las veces, esa funcionalidad exige ejecutar discontinuidades geométricas en una misma sección resistente o en secciones muy cercanas. Ello puede generar tensiones localizadas de mayor valor a la nominal. Esta circunstancia es difícil de obviar. En varios trabajos anteriores [1-5] realizados por el equipo de investigación de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Lomas de Zamora, Argentina, se ha podido comprobar que la magnitud de las tensiones localizadas por combinación de discontinuidades geométricas produce tensiones localizadas de magnitud significativamente menores a las que indican distintos autores [6-8].

La distribución de tensiones en discontinuidades geométricas aisladas es bien conocida y puede estudiarse a partir de diversos libros de texto, pero ante la presencia de varias discontinuidades, que interactúan entre sí, las soluciones disponibles son escasas.

La existencia de trabajos de investigación sobre la distribución de tensiones en placas planas, con cargas axiales en sus bordes, con agujeros o cambio de ancho es abundante. Chin-Bing Ling, Schouly y Hutter, citados en Peterson, determinaron matemáticamente las relaciones entre las tensiones máximas y nominales para placas con dos agujeros, con más de dos agujeros en línea y para dos líneas paralelas de agujeros [9] (págs. 91 a 98), con carga aplicada en dos caras opuestas de la placa o en las cuatro aristas. Se observa, por ejemplo, que para la placa con una línea de agujeros orientada de manera perpendicular a la carga, la tensión en el punto periférico interno del orificio aumenta a medida que disminuye la distancia entre centros de los agujeros y disminuye, a medida que se alejan. El factor de concentración de tensiones  $K_t$ , calculado entre la máxima tensión obtenida y la tensión en la sección neta entre agujeros, disminuye a medida que ésta última aumenta por

acercamiento entre centros. Lipson y Juvinall [10] ofrecen el gráfico (Figura 20-51) que muestra el valor del factor de concentración de tensiones -calculado matemáticamente a partir de la relación con la tensión nominal- para una placa plana con varios agujeros distribuidos en dos ejes paralelos entre sí y perpendiculares a la carga aplicada, equidistantes, tanto lineal como diagonalmente; a medida que los agujeros se separan el factor de concentración de tensiones tiende a 3. Zimmerman [11] también ha estudiado matemáticamente las tensiones en el borde interno de dos agujeros muy cercanos entre sí, incluso al punto en que llegan a ser tangentes, ubicados sobre una placa. Por su parte, Peñaranda Carrillo, et. al [12], han determinado el factor de concentración de tensiones en los bordes de dos agujeros de igual diámetro, en una placa plana, orientados en el sentido de la carga y perpendicularmente a ella. El estudio consistió en determinar las tensiones en el borde interno de los orificios, variando la magnitud de sus diámetros y la distancia que los separa; con la utilización del método de elementos finitos sus conclusiones apuntan a la relación entre la menor distancia y el mayor valor del factor de concentración (como en los casos anteriormente descritos). La aplicación del análisis de tensiones por elementos finitos es muy utilizado por la eficiencia y confiabilidad que otorga, Roldan y Bastidas [13] lo usan para estudiar una placa plana con agujero y comparan los resultados con los obtenidos mediante la teoría matemática de la elasticidad y de manera experimental; sus conclusiones indican que el factor de concentración de tensiones obtenido matemáticamente es superior en un 12,5% al calculado experimentalmente y por aplicación de los elementos finitos, que coinciden. Haddon, citado en Pilkey y Pilkey [14] (págs. 308-313), ha estudiado el efecto que producen, en la distribución de tensiones, dos orificios circulares, de distinto diámetro, en una placa plana de dimensiones infinitas, encontrando que, para una diferencia de diámetros dada, la tensión en el borde interno de los orificios aumenta con la cercanía entre ellos, y para una separación dada, la magnitud de la tensión localizada disminuye a medida que los diámetros tienden igualarse. Monroy y Godoy [15] estudian las interacciones producidas por la existencia de varias perforaciones circulares, de distintos diámetros, sobre una placa plana sometida a carga axial en sus dos extremos opuestos, su estrategia fue determinar la distribución del campo de esfuerzos en la zona intermedia entre las discontinuidades, encontrando que las tensiones dependen de la distancia que las separa y de la relación de tamaño entre ellos, observándose que las tensiones crecen a medida que los agujeros se acercan entre sí a menos de una distancia de 4 radios, y decrecen a medida que se alejan, llegando a ser poco significativas a una distancia de más de 13 radios. Ting y Chen [16] también estudiaron la distribución de las tensiones para la placa plana con dos, tres y cinco perforaciones circulares, de igual y distintos diámetros, orientadas perpendicularmente o en igual sentido a la carga externa; sus conclusiones coinciden en el sentido de la influencia de la cercanía de las perforaciones con la intensidad de las tensiones generadas en sus bordes internos.

Con respecto al estudio de la distribución de tensiones en placas planas, con cambio de ancho, sometidas a cargas axiales, se tienen los trabajos de Frocht (1935), citados en Peterson [9] y en Lipson y Juvinall [10], y los de Appl y Koerner (1969) y Wilson y White (1973) citados por Pilkey y Pilkey [14], donde, por medio del método de fotoelasticidad, se obtuvieron los factores de concentración de tensiones, indicando que, a medida que aumenta la diferencia entre los dos anchos de la placa, el factor se incrementa, del mismo modo que para pequeños radios de enlace entre las dos secciones.

A pesar de la cantidad de estudios existentes para los casos descritos anteriormente, trabajos que analicen la distribución de las tensiones, en especímenes que incluyan ambas discontinuidades geométricas: orificios circulares con cambio de ancho, en placas planas cargadas axialmente, no están disponibles.

En este trabajo se analiza el grado de importancia de la ubicación relativa de las discontinuidades geométricas en el valor de las tensiones localizadas generadas, y se comparan los factores teóricos de concentración de tensiones  $K_t$  obtenidos, con aquellos ofrecidos en la literatura clásica [9 y 14] para casos de discontinuidades geométricas únicas y sencillas.

Este procedimiento indica la importancia de estudiar con detenimiento el diseño más apropiado, de modo de garantizar la optimización de los recursos materiales minimizando las tensiones localizadas.

## 2. ESPÉCIMEN DE ESTUDIO

El espécimen de estudio para el presente trabajo es una pieza plana, de pequeño espesor, con dos anchos distintos, unidos por medio de una curva suave semicircular, con una perforación circular sobre el eje de simetría longitudinal, como se muestra en la Figura 1.

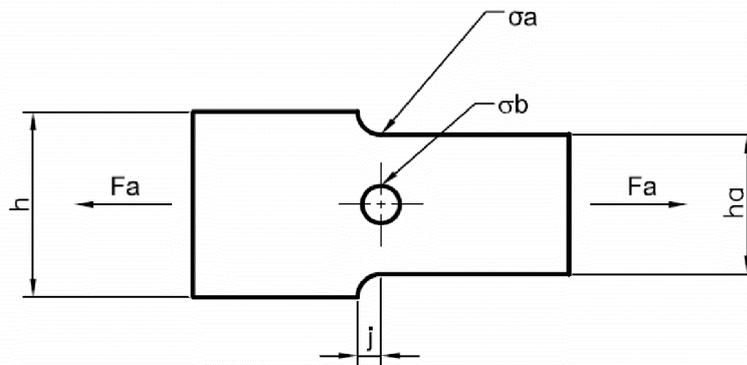


Figura 1. Espécimen de estudio

La singularidad del análisis consiste en determinar las tensiones en el punto a:  $\sigma_a$  y en el punto b:  $\sigma_b$  para distintas posiciones de la perforación circular -situada mediante la cota  $j$ - a lo largo del eje central.

La placa está solicitada a carga axial  $F_a$  constante, resultante de la aplicada de manera distribuida en cada uno de sus extremos, que genera una tensión nominal de 200 MPa en la sección menor.

Las dimensiones de la placa son:  $h = 130$  mm,  $h_a = 100$  mm, radio de empalme entre anchos  $r_a = 15$  mm, radio de la perforación circular  $r_b = 15$  mm, espesor 1mm, con lo que resultan las relaciones:  $2r_b/h_a = 0,30$ ,  $r_a/h_a = 0,15$  y  $h/h_a = 1,30$ .

La longitud total es suficiente para evitar su influencia en los resultados que puedan obtenerse (Troyani, et. al. 2003, citado en [14]) y poder compararlos con los indicados en la "Chart 3.1", pág. 151 de Pilkey y Pilkey.

## 3. HERRAMIENTA, PROCEDIMIENTO Y RESULTADOS

Se utiliza un software de análisis de tensiones por elementos finitos. La herramienta ya fue validada en otras oportunidades [2,5], constatando que puede presentar un error menor al 4% en los resultados obtenidos. Se aplica para obtener las tensiones localizadas en los puntos a y b, para distintas posiciones de la perforación central dada por la cota  $j$ . El eje transversal de referencia para la medición de la cota  $j$ , se ubica en el inicio de la curva de empalme entre el ancho mayor y el ancho menor. Hacia la derecha de esa referencia se miden las cotas  $j$  positivas, y negativas hacia la izquierda.

Se determinan las tensiones en los puntos indicados para los casos en que  $j=0$ ,  $j=15$ ,  $j=30$  y  $j=-15$ .

Con los valores de las tensiones obtenidas se calcula el "Factor teórico de concentración de tensiones  $K_t$ " para el punto a y el b, haciendo la relación:

$$K_{ta} = \frac{\sigma_{a.máx}}{\sigma_{nom}} \quad (1)$$

Y también:

$$K_{tb} = \frac{\sigma_{b.máx}}{\sigma_{nom}} \quad (2)$$

Donde:

- $K_{ta}$  Es el factor teórico de concentración de tensiones para el punto a.
- $K_{tb}$  Es el factor teórico de concentración de tensiones para el punto b.
- $\sigma_{a,máx}$  Es la máxima tensión axial obtenida en el punto a, para cada alternativa de posición de la perforación central.
- $\sigma_{b,máx}$  Es la máxima tensión axial obtenida en el punto b, para cada alternativa de posición de la perforación central.
- $\sigma_{nom}$  Es la tensión nominal de 200 MPa existente en la sección completa de ancho ha.

Estos valores se comparan con aquellos ofrecidos por Pilkey y Pilkey [14] para “Chart. 3.1. Factores de concentración de tensiones  $K_t$  de una barra plana escalonada con empalme curvo de hombro sometida a tracción”, página 151 y “Chart. 4.1. Factores de concentración de esfuerzos  $K_{tg}$  y  $K_{tn}$  de la tensión en un elemento de ancho finito delgado con un agujero circular”, página 270.

#### 4. Resultados obtenidos para $j = 0$

La Figura 2 muestra el modelo de trabajo para  $j=0$ . El eje vertical de la perforación central coincide con el inicio del radio de empalme entre ambos anchos. En este caso y en los subsiguientes se ha aprovechado la simetría de la pieza para lograr ahorro de procesamiento informático.

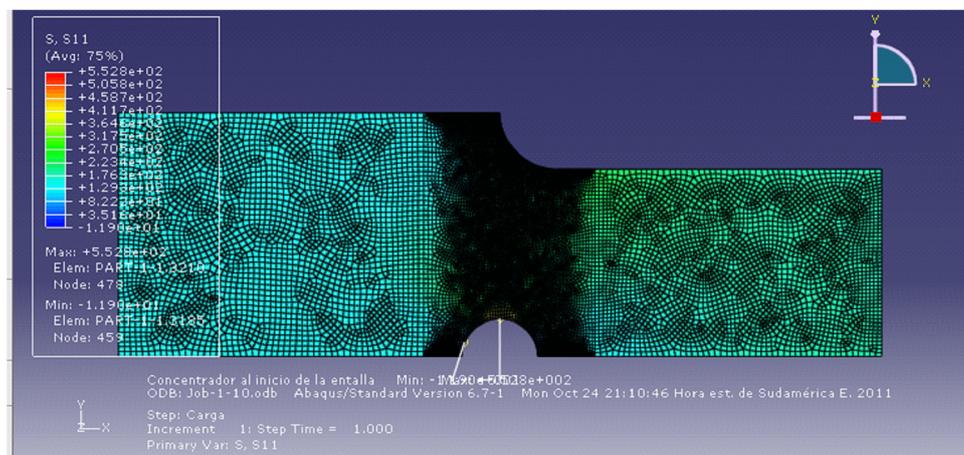


Figura 2. Modelo de análisis de tensiones para  $j = 0$

Se obtiene la tensión  $\sigma_{a,máx}$  en el punto a: 362 MPa,  $\sigma_{b,máx}$  en el punto b = 553 MPa.

El color más oscuro se debe a la alta concentración de celdas de menor tamaño en la zona de estudio, si la figura estuviera más ampliada se verían tonalidades del rojo.

#### 5. Resultados obtenidos para $j = 15$ mm

La Figura 3 muestra el modelo de trabajo para  $j=15$ mm. El eje vertical de la perforación central se ha desplazado hacia la derecha, respecto del esquema anterior, y coincide con la finalización del empalme entre ambos anchos.

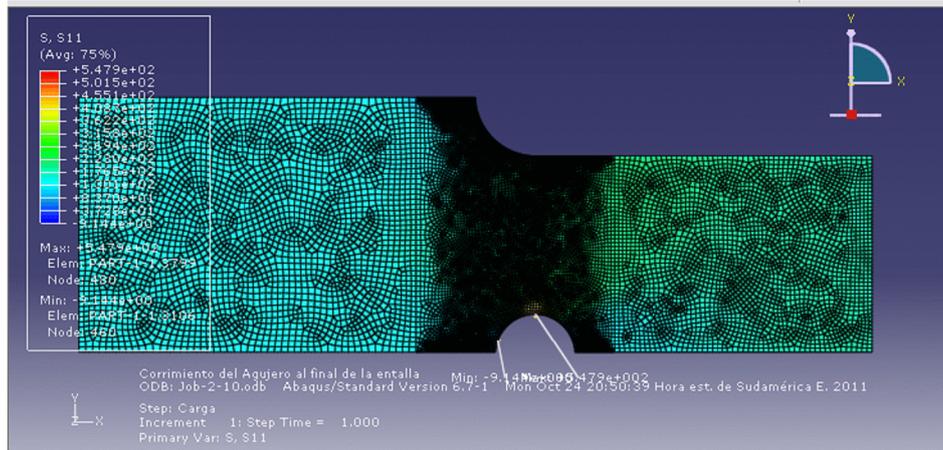


Figura 3. Modelo de análisis de tensiones para  $j = 15 \text{ mm}$

Se obtiene la tensión  $\sigma_{a,máx}$  en el punto a: 360 MPa,  $\sigma_{b,máx}$  en el punto b = 534 MPa.

### 6. Resultados obtenidos para $j = 30 \text{ mm}$

La Figura 4 muestra el modelo de trabajo para  $j=30\text{mm}$ . El eje vertical de la perforación central se ha desplazado más hacia la derecha que en el caso anterior. Obsérvese que ésta está fuera de la zona de cambio de ancho. Es decir la combinación de discontinuidades geométricas combinadas prácticamente ha desaparecido.

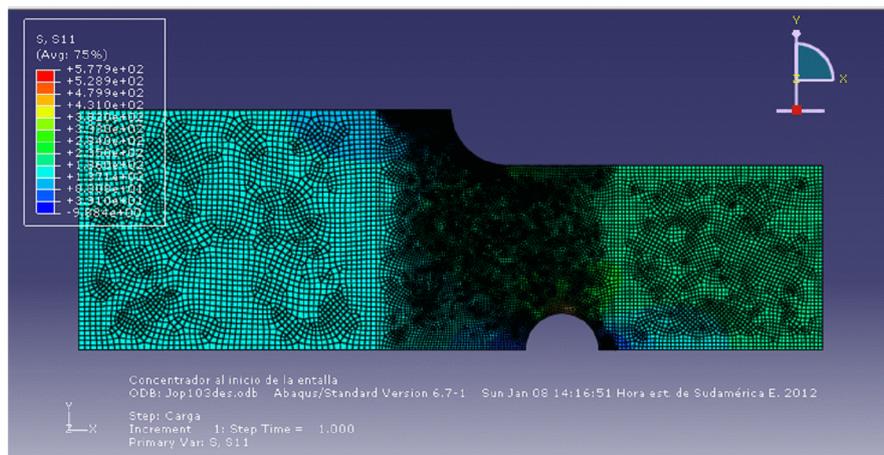


Figura 4. Modelo de análisis de tensiones para  $j = 30 \text{ mm}$

Se obtiene la tensión  $\sigma_{a,máx}$  en el punto a: 389 MPa,  $\sigma_{b,máx}$  en el punto b = 573 MPa.

### 7. Resultados obtenidos para $j = -15 \text{ mm}$

La Figura 5 muestra el modelo de trabajo para  $j= -15 \text{ mm}$ . En este caso, el eje vertical de la perforación central se ha desplazado hacia la izquierda respecto de  $j=0$ . Obsérvese que, como para el caso de  $j = 30 \text{ mm}$ , la perforación central se ubica fuera de la zona del cambio de ancho. Puede entenderse que en este caso también ha desaparecido la combinación de discontinuidades geométricas.

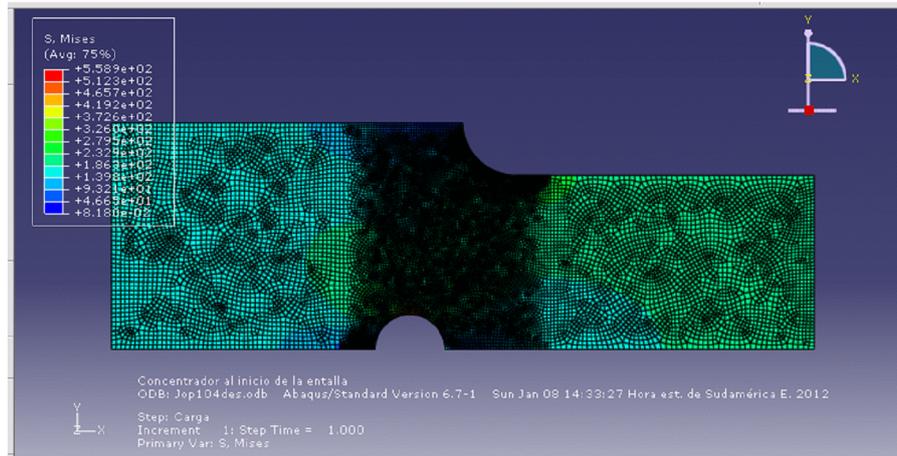


Figura 5. Modelo de análisis de tensiones para  $j = -15$  mm

Se obtiene la tensión  $\sigma_{a,m\acute{a}x}$  en el punto a: 382 MPa, y  $\sigma_{b,m\acute{a}x}$  en el punto b = 556 MPa

## 8. Cuadros resumen de resultados

La Tabla 1 muestra los valores de las tensiones máximas obtenidas para cada uno de los puntos en estudio y cada disposición de la perforación central. La tabla permite realizar la comparación entre ellos y, además, se indica el factor de concentración de tensiones  $K_t$  teórico en función de la tensión nominal aplicada de 200 MPa de acuerdo a las ecuaciones (1) o (2) según corresponda.

Cota j (mm)	0		15		30		-15	
Esquema								
		Kt		Kt		Kt		Kt
Máx. tensión en el punto a (MPa)	362	1,81	<b>360</b>	1,8	<b>389</b>	1,94	382	1,91
Máx. tensión en el punto b (MPa)	553	2,76	<b>534</b>	2,65	<b>573</b>	2,86	556	2,78

Tabla 1. Tensiones máximas y Factor teórico de concentración de tensiones  $K_t$  para los puntos a y b

Puede leerse que, de todas las máximas tensiones obtenidas, las menores corresponden, tanto para el punto a como para el b, a la cota  $j=15$  mm. Las mayores tensiones se leen para  $j=30$  mm para ambos puntos.

En la Tabla 2 se han colocado nuevamente los Factores de concentración de tensiones de la Tabla 1, conjuntamente con los ofrecidos por [14] como se indicó anteriormente.

	Cota j (mm)	0	15	30	-15
Según el presente estudio.	(1) Punto a	1,81	1,8	1,94	1,91
	(2) Punto b	2,76	2,65	2,86	2,78
[14] Chart. 3.1.	(3) Punto a	1,87	1,87	1,87	1,87

	(4) Relación (1/3)	0,97	0,96	1,04	1,02
[14] Chart. 4.1.	(5) Punto b	3,13	3,13	3,13	3,13
	(6) Relación (2/5)	0,88	0,85	0,91	0,89

Tabla 2. Comparación de valores del Factor de concentración de tensiones  $K_t$  para los puntos a y b

Se observa una diferencia entre +4% y - 4% entre el valor del factor  $K_t$  según el presente trabajo y el dado por [14] para el punto a. Para el punto b la diferencia es más importante, pues varía entre -15% a -9% para el valor obtenido en el presente estudio respecto del dado en los gráficos de [14].

En la Figura 6 se han trazado los valores de las tensiones de los puntos a y b, en función de la cota  $j$ , para una práctica visualización gráfica. Puede observarse claramente que las tensiones se reducen en la zona comprendida entre  $j=0$  y  $j=15$  mm.

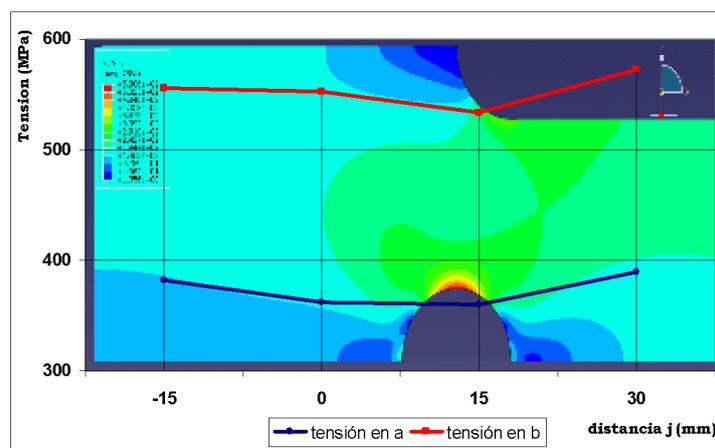


Figura 6. Variación de las tensiones en el punto a y b en función de la cota  $j$

## 9. CONCLUSIONES

El diseño de componentes mecánicos constituidos por placas planas, sometidos a cargas axiales constantes, con discontinuidades geométricas combinadas no debe presentarse como un escollo insalvable. Se ha podido demostrar en este trabajo (y en anteriores) que las tensiones localizadas, que se generan por ellas, no son de valor significativo o alarmante. También se ha podido comprobar que las sugerencias disponibles, respecto del cálculo del factor de concentración de tensiones teórico, en los textos de diseño de elementos de máquinas no son aplicables.

El factor  $K_t$  para el punto a, en el presente estudio, tiene una diferencia aceptable de +/-4% respecto del indicado en el gráfico “Chart. 3.1” de la obra de Pilkey y Pilkey [14]. Ello indica que la existencia de la perforación central no lo afecta sensiblemente, por lo menos con las relaciones dimensionales con las que se trabajó aquí.

No ocurre lo mismo con el valor del factor  $K_t$  para el punto b, pues resultan sensiblemente menores los obtenidos en el presente estudio, respecto a los ofrecidos por la “Chart. 4.1” del Pilkey y Pilkey. Parecería indicar que la existencia de otra discontinuidad geométrica cercana, afecta el valor del factor  $K_t$  tomado aisladamente, reduciendo su magnitud.

Es decir, la combinación de discontinuidades geométricas, en la configuración estudiada, no incrementa los valores de los factores de concentración de tensiones de cada geometría tomada independientemente.

Este comportamiento ya fue observado en trabajos anteriores por este equipo de investigadores. La hipótesis a estudiar contempla la posibilidad que ello resulte del necesario equilibrio interno de tensiones, frente a la existencia de mayor cantidad de puntos

localmente sobre tensionados. Cuando existe una discontinuidad geométrica aislada, se genera una zona de mayor tensión, cuya ubicación depende del tipo de discontinuidad y su orientación con el sentido de la carga aplicada; cuando existen más discontinuidades combinadas, se producen tensiones que interactúan entre sí de modo que se distribuyen de manera de mantener el equilibrio [15].

## 10. REFERENCIAS

- [1] R.M. Amé; G.M. Dasso, “Concentración de tensiones producida por discontinuidades Geométricas combinadas. Una exploración del estado del arte”, Primer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica, I° CAIM-2008, Bahía Blanca, Argentina, (2008).
- [2] G.M. Dasso; R.M. Amé, “Nuevos aportes al análisis de las tensiones localizadas producidas por discontinuidades geométricas combinadas. Una aplicación del análisis de tensiones por elementos finitos”, Primer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica I°CAIM-2008, Bahía Blanca, Argentina (2008).
- [3] G.M. Dasso; R.M. Amé; D. H. Lezama, “Determinación de las tensiones localizadas de Von Mises producidas por discontinuidades geométricas combinadas en estados complejos de tensión”, Segundo Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica, II° CAIM-2010, San Juan, Argentina, (2010).
- [4] R.M. Amé; G.M. Dasso; D. H. Lezama, “Tensiones localizadas producidas por discontinuidades geométricas combinadas”, X Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Porto, Portugal, (2011).
- [5] R. M. Amé; G. M. Dasso; D. H. Lezama. “Tensiones localizadas producidas por discontinuidades geométricas combinadas”, *Revista Cubana de Ingeniería*, 2(2), (2011), 43-48.
- [6] J. E. Shigley; L. D. Mitchell. *Diseño en Ingeniería Mecánica*, Editorial McGraw-Hill Inc., (1983).
- [7] V.M. Faires. *Diseño de Elementos de Máquinas*, editorial Montaner y Simon S.A., (1970).
- [8] A. D. Deutschman; W. J. Michels; C. F. Wilson. *Diseño de máquinas, Teoría y práctica*, editorial CECSA, (1985).
- [9] R. E. Peterson. *Stress Concentration Design Factors*, editorial John Wiley & Sons Inc., (1974).
- [10] C. Lipson; R. C. Juvinall. *Handbook of Stress and Strength. Design and material applications*, editorial Macmillan Company, (1963).
- [11] R. W. Zimmerman. “Stress singularity around two nearby holes”. *Mechanics Research Communications* 15, (1988), 87-90.
- [12] M. Peñaranda Carrillo; J. B. Pedroza Rojas; J. Méndez Orellana. “Determinación del factor teórico de concentración de esfuerzo de una placa infinita con doble agujero”, 8° Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Cusco, Perú, (2007).
- [13] F. Roldan; U. Bastidas. “Estudio experimental y por análisis de elementos finitos del factor de concentración de esfuerzo producido por un agujero en una placa plana”. *Dyna Universidad nacional de Colombia*, vol 69, núm. 137, (2002).
- [14] W. D. Pilkey; D. F. Pilkey. *Peterson’s Stress Concentration Factors*, editorial John Wiley & Sons, (2008).
- [15] H. A. Monroy; L. A. Godoy. “Un sistema computacional para la simulación de interacción de defectos estructurales”, sexto Congreso Argentino de Mecánica Computacional, MECOM 99, Mendoza, Argentina, (1999).
- [16] K. Ting; K. T. Chen; W. S. Yang. “Applied alternating method to analyze the stress concentration around interacting multiple circular holes in an infinite domain”. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 36, Issue 4, (1999).