

## Desarrollo de una estrategia basada en el MEC para el análisis tensional de engranajes

J.L. Iserte Vilar<sup>(1)</sup>, F.T. Sánchez Marín<sup>(1)</sup>, I. González Pérez<sup>(2)</sup>, A. Fuentes Aznar<sup>(2)</sup>

(1) Dpto. de Ingeniería Mecánica y Construcción. Universitat Jaume I  
jiserte@emc.uji.es

(2) Dpto. de Ingeniería Mecánica. Universidad Politécnica de Cartagena

---

*En el trabajo se presenta una aproximación para el cálculo tensional de los engranajes durante la transmisión de potencia. En el desarrollo de la misma se asume la hipótesis simplificada de contacto normal sin fricción, que ha mostrado tener un suficiente grado de aproximación en este tipo de aplicaciones.*

*Una de las etapas del proceso del cálculo presentado consiste en la obtención de la matriz de conformidad que relaciona las presiones en los nodos de la posible zona de contacto con los desplazamientos de los mismos. Este proceso se realiza aplicando el método de los elementos de contorno a cada rueda dentada por separado. A partir de la matriz de conformidad de cada rueda dentada puede obtenerse la matriz de contacto del problema con la que pueden determinarse las presiones en la zona de contacto.*

*Con las presiones obtenidas en la zona de contacto puede calcularse la distribución de tensiones en el interior del diente debida a las presiones de contacto, así como las tensiones en la base del diente debida a la flexión, y los errores de alineación debidos a estas deformaciones elásticas utilizando de nuevo el método de los elementos de contorno a cada elemento de la transmisión por separado.*

*La aproximación propuesta tiene la ventaja de reducir notablemente el número de incógnitas a la hora de resolver el problema de contacto para cada punto del ciclo de engrane, ya que sólo están involucrados los nodos de la posible zona de contacto.*

*El método propuesto se ha implementado en Visual C#. Como parte de su validación se ha aplicado al problema de contacto de esferoides. Los resultados obtenidos se han comparado con los correspondientes obtenidos al aplicar la teoría de Hertz. Los resultados muestran una gran aproximación entre los valores de presión de contacto obtenidos analíticamente según la teoría de Hertz y los obtenidos mediante el método propuesto*

---

### 1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo se sitúa en el marco de la investigación referente al diseño de transmisiones avanzadas de engranajes. Entendemos por tales transmisiones a aquellas cuyas superficies de sus engranajes no son las estándar sino superficies modificadas [1]. Dichas modificaciones buscan una mejor localización del contacto entre los engranajes intentando reducir los efectos negativos relacionados con las desalineaciones que se dan en la transmisión. En la figura 1 puede observarse dos tipos de superficies de dientes modificadas con abombamiento parcial (a) y total (b). Las desalineaciones cuyos efectos pretenden corregirse pueden deberse tanto a errores en la alineación de montaje como a las desalineaciones generadas por las deformaciones elásticas producidas por efecto de la transmisión del par. Estas desalineaciones pueden provocar que la zona de contacto se aleje de la zona central del diente de la rueda dentada yéndose a los extremos de aquel. Como consecuencia pueden aparecer sobrepresiones en la zona de contacto, sobretensiones por deflexión en la base del diente y un incremento de los errores de transmisión. A su vez, esto es fuente de vibraciones, ruido, y de una disminución de la fiabilidad del sistema.

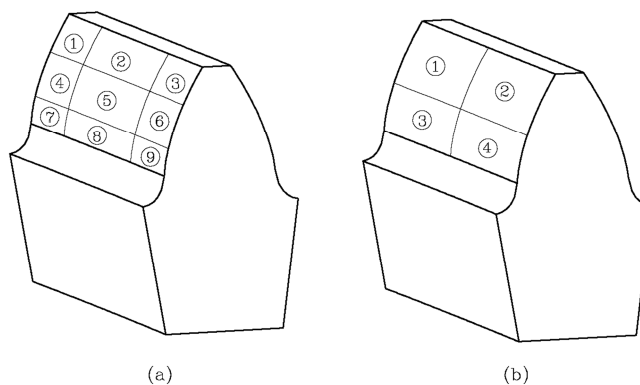


Figura 1. Superficie del diente de un engranaje cilíndrico de dientes rectos en el caso de: (a) abombamiento parcial (b) abombamiento total

De esta forma, el análisis tensional permite obtener valiosa información sobre:

- Las tensiones de contacto, que implica la determinación tanto de la distribución de presiones en el las superficies de contacto, como de la distribución de tensiones por debajo de dichas superficies.
- La deformación sufrida por las ruedas dentadas, útil para el cálculo de errores de transmisión bajo carga.

En la actualidad existen diferentes aproximaciones que permiten establecer el estado tensional de los elementos de los engranajes. Podemos dividir estas aproximaciones en dos grupos. Por un lado están los métodos aproximados basados en resultados analíticos de bajo coste computacional, pero que pueden adolecer de insuficiente precisión, o cuyo ámbito de aplicación es restringido. Uno de estos métodos queda recogido en el trabajo [2]. Aquí puede verse como un método con muy bajo coste computacional basado en la teoría de del contacto de Hertz [3] permite obtener con muy buena aproximación las presiones de contacto y la distribución de tensiones en el interior del diente debida, pero no ofrece información sobre las tensiones en la base del diente debida a flexión. Por otra parte, al estar basado en la teoría de Hertz, el método pierde su validez cuando la zona de contacto se extiende sobre zonas con grandes variaciones de curvatura, como ocurre en el caso superficies de dientes modificadas con abombamiento parcial (ver figura 1), o cuando la zona de contacto llega hasta los bordes.

Por otra parte, estarían los métodos de alto coste computacional, principalmente basados el método de los elementos finitos (MEF). Estos métodos tienen la ventaja de ofrecer una mucha mayor fiabilidad en los resultados obtenidos, pero tienen como clara desventaja su complejidad a la hora de aplicarlos al caso del contacto en engranajes, y su elevado coste computacional.

En este trabajo se presenta una aproximación para resolver el problema de contacto que hace uso del método de los elementos de contorno (MEC) pero que reduce en gran medida el coste computacional sobre todo si se pretende obtener el estado tensional de la transmisión durante todo el ciclo de engrane. Los resultados obtenidos en [2] muestran que la simplificación de considerar contacto normal sin fricción, dentro de las limitaciones descritas anteriormente, es suficientemente adecuada para obtener las presiones de contacto.

Por propósito de simplicidad la presentación del algoritmo de cálculo se realizará asumiendo una transmisión de engranajes cilíndricos rectos.

## 2. METODOLOGÍA

### 2.1. Obtención de la matriz de contacto mediante el MEC

El método propuesto, para resolver el problema de contacto, tiene como primer paso obtener, para cada rueda dentada independientemente, la relación entre las presiones en la

zona de contacto y los desplazamientos del piñón  $\bar{u}_{z1}$  y de la rueda  $\bar{u}_{z2}$ . Esto podría hacerse a través del operador de Green o, matriz de conformidad. Para ello, considérese un único cuerpo elástico  $\Omega$  representado en un sistema de referencia  $(x, y, z)$ . Si sobre este cuerpo actúan cargas de volumen  $\mathbf{b}(x, y, z)$  y superficiales  $\mathbf{t}(x, y, z)$  el operador de Green  $\mathbf{G}$  permite obtener el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}(x, y, z)$  causado por estas cargas:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{G}(\mathbf{b}(x, y, z), \mathbf{t}(x, y, z)) \quad (2)$$

De una forma aproximada, si se considera un cuerpo tridimensional discretizado en el que únicamente aparecen cargas superficiales, la relación entre las cargas en los nodos  $\mathbf{t}_i$  y los desplazamientos nodales  $\mathbf{u}_i$  pueden representarse por una matriz cuadrada  $G$

$$u = Gt \quad (3)$$

siendo la matriz  $G$  de tamaño  $3I \times 3I$ , donde  $I$  es el número total de nodos de la discretización del sólido, y los vectores  $u$  y  $t$  están formados por todas las componentes de los vectores  $\mathbf{u}_i$  y  $\mathbf{t}_i$  de cada nodo:

$$u = [u_{1,x}, u_{1,y}, u_{1,z}, \dots, u_{I,x}, u_{I,y}, u_{I,z}]^T, \quad (4)$$

$$t = [t_{1,x}, t_{1,y}, t_{1,z}, \dots, t_{I,x}, t_{I,y}, t_{I,z}]^T. \quad (5)$$

En el caso general, la determinación de la matriz de conformidad para un sólido discretizado se construye de la siguiente forma. Cada columna de la matriz de conformidad (asociada a un GDL) se obtiene como la solución al problema elástico en el que actúa una carga puntual en un nodo en la dirección correspondiente con el GDL considerado. Ahora bien, de cara a estudiar el problema de contacto entre dos sólidos, se dividirá el contorno de cada sólido en tres partes con diferentes condiciones de contorno descritas en la Figura 2, donde  $\Gamma_u$  es una parte donde los desplazamientos de los nodos están determinados,  $\Gamma_t$  es la zona donde se conocen las fuerzas externas aplicadas, mientras que la zona  $\Gamma_c$  es la zona donde pueden darse el contacto entre ambos sólidos, y  $\mathbf{n}$  indica la dirección normal a la superficie en cada punto.

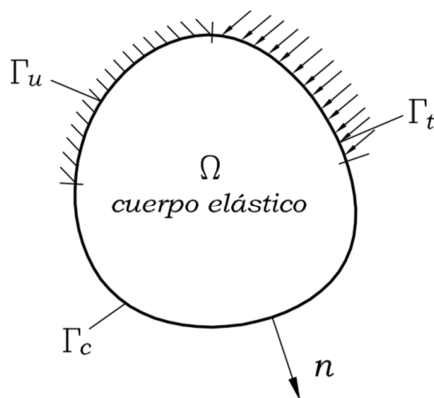


Figura 2. Diferentes superficies en el contorno de un cuerpo elástico

El modelo de elementos de contorno propuesto para cada rueda dentada está basado en las ideas del modelo de elementos finito descrito en [4] en lo relativo a las restricciones del modelo. En vez de considerar un modelo que incluya todos los dientes de la rueda dentada se considera tan sólo un número reducido de ellos, y se introducen superficies rígidas en los extremos de los mismos. En la figura 3 se señalan las condiciones de contorno para cada una de las superficies en las que se divide la rueda dentada. Por simplicidad, en este caso se presenta un modelo en el que toda la rueda dentada se ha reducido a un único diente, sin embargo, el proceso de cálculo explicado sería válido también para cualquier número de dientes e incluso para múltiples contactos entre dientes. En la figura 3 las superficies

rígidas pertenecientes a  $\Gamma_u$  son las indicadas con rayado fino. La zona de posible contacto, perteneciente  $\Gamma_c$ , será únicamente el flanco del diente del lado conductor/conducido, mientras que el resto del contorno pertenecerá a  $\Gamma_t$ , donde las fuerzas externas aplicadas serán nulas.

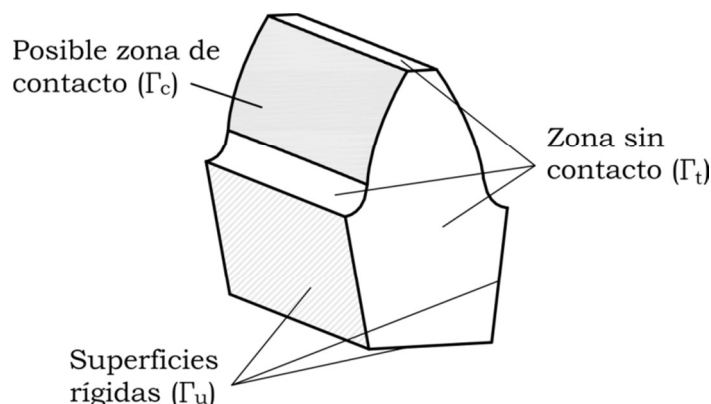


Figura 3. Condiciones de contorno para las superficies de las ruedas dentadas

Siguiendo el desarrollo del método de los elementos de contorno expuesto en [5] puede verse como el planteamiento de las ecuaciones integrales resultantes de la aplicación del Teorema de Betti mediante métodos numéricos, y tras el ensamblado y reordenación de las incógnitas del sistema, pueden presentarse en la forma estándar:

$$Ax = b \quad (6)$$

Donde  $A$  es una matriz de coeficientes de tamaño  $3I \times 3I$ ,  $x$  es el vector de incógnitas, y  $b$  la parte no homogénea dada por las condiciones de contorno.

Para resolver el problema de contacto no será necesario construir completamente las matrices de conformidad definidas en la ecuación 3 correspondientes al piñón y la rueda,  $G_1$  y  $G_2$ , puesto que tan sólo se necesitará relacionar las tensiones en los posibles nodos de contacto los desplazamientos de estos mismos nodos. Además, en los nodos de la zona de contacto tan sólo se tendrán tensiones debidas a las presiones de contacto, por lo que sólo se deberá tener en cuenta esta posibilidad.

De esta forma, se planteará para cada rueda dentada aislada y para cada nodo  $i$  ( $i=1, \dots, m$ ) de la posible zona de contacto  $\Gamma_c$ , el problema en el cual todas las superficies rígidas  $\Gamma_u$  tienen desplazamiento nulo, y la única carga externa es una presión  $p_i = 1$  en el nodo  $i$  (siendo  $p_i = -\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{n}_i$ ). Cada uno de estos problemas dará lugar a un sistema lineal como el de la ecuación 6, donde la matriz de coeficientes  $A$  será la misma en todos los casos y sólo variará el vector  $b$ . Esto hace especialmente aconsejables los métodos de resolución con factorización (como la descomposición L-U) que reducen considerablemente el coste computacional. En la resolución de cada uno de estos casos se obtendrá como solución los desplazamientos de todos los nodos de la rueda dentada. De estos, se tomarán únicamente los desplazamientos de los nodos de la zona de posible contacto  $\Gamma_c$  y a partir de ellos se obtendrá el desplazamiento en la dirección normal a la superficie en cada nodo  $u_{n_k} = \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k$  ( $k=1, \dots, m$ ). Las columnas de las matrices de contacto  $C^{(1)}$ , del piñón, y  $C^{(2)}$  estarán formadas por estos desplazamientos normales obtenidos en cada caso de presión unitaria. De esta forma se cumplirá que:

$$u_n^{(1)} = C^{(1)}p \quad (7)$$

$$u_n^{(2)} = C^{(2)}p \quad (8)$$

Las ecuaciones 7 y 8 permiten relacionar las presiones de contacto y los desplazamientos de los nodos en las zonas de posible contacto, donde se ha asumido mallado conforme entre ambos sólidos e igual ordenación. El tamaño de las matrices de contacto será pues  $m \times m$ .

## 2.2. Resolución del problema de contacto

Una vez obtenidas las matrices de contacto de piñón y rueda se resolverá el problema de contacto adaptando un algoritmo propuesto por Johnson [6]. En primer lugar será necesario establecer la posición inicial de contacto. Se partirá de una posición de la rueda dada por su ángulo de giro  $\phi_2$ , y se obtendrá la posición de contacto del piñón  $\phi_1$ —considerados ambos elementos como sólidos rígidos— utilizando el algoritmo de análisis de contacto descrito en [1]. En la figura 4 puede verse un esquema de dicha posición inicial de contacto. Para esta posición se calculan las distancias entre cada par de nodos relacionados del piñón y rueda de la zona de posible contacto,  $h_i$ . Una vez aplicado el par, debido a las deformaciones elásticas, el piñón habrá girado un  $\Delta\phi_1$ . para cada par de nodos relacionados se supondrá la siguiente relación:

$$u_{n_i}^{(1)} + u_{n_i}^{(2)} + h_i - \delta \begin{cases} = 0 & \text{si los nodos están en contacto} \\ > 0 & \text{si los nodos no están en contacto} \end{cases} \quad (9a)$$

$$(9b)$$

donde  $\delta$  es la proyección del desplazamiento que tendría el punto inicial de contacto del piñón al girar un ángulo  $\Delta\phi_1$ , considerado como sólido rígido. Dado que el valor de  $\Delta\phi_1$  será muy pequeño se cumplirá que  $\delta \cong k \cdot \Delta\phi_1$ , donde  $k$  es una constante que dependerá de la geometría de los engranajes y de la posición de contacto.

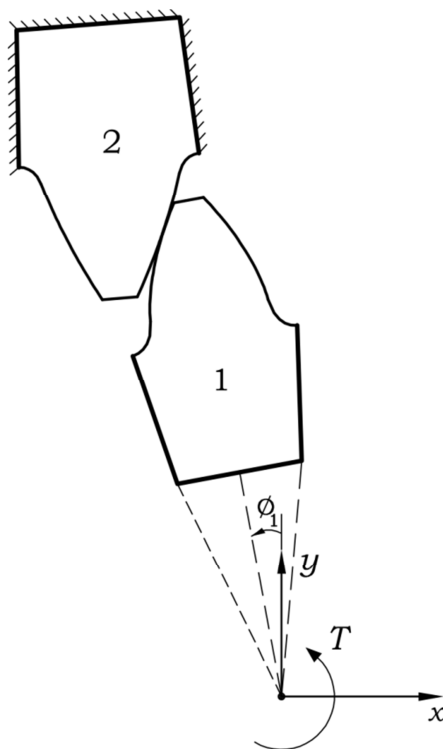


Figura 4. Modelo de la transmisión para la aplicación del par

Para un valor de  $\delta$  determinado el problema de contacto puede resolverse de la siguiente manera iterativa. Se asume que existe contacto en todos los nodos de la zona de posible contacto. De esta forma, y teniendo en cuenta las ecuaciones 7, 8 y 9a, se tendrá:

$$Cp = \delta - h_i \quad (10)$$

Donde  $C = C^{(1)} + C^{(2)}$ . La resolución del sistema lineal 10 dará un vector de valores de presión para cada nodo de la posible zona de contacto. Si la zona real de contacto no coincide con la supuesta, algunos de los valores de estas presiones serán negativos, lo que implicaría que son necesarias tensiones de tracción en algunas zonas de la superficie de contacto supuesta para mantener dicho contacto. Estos nodos de presión negativa pasarán a considerarse que no están en contacto para la siguiente iteración. Este proceso termina cuando las presiones de la zona de contacto supuesta son todas positivas.

La cuestión es que para este tipo de problemas el dato de entrada es el del par aplicado en la transmisión y no el valor de  $\delta$ . En este caso, el sistema 10 se añadirá una nueva ecuación en la que el par será función de las presiones en la zona de contacto y  $\delta$  será una nueva incógnita más. Este sistema se resolvería de la misma forma iterativa.

### 2.3. Postproceso

Una vez resuelto el problema de contacto, de él se habrán obtenido directamente las presiones y la zona de contacto y el  $\Delta\phi_1$  – asociado al error de transmisión. El siguiente paso será resolver el sistema 6, definido para el piñón y rueda aislados, en el que los valores de la presión en cada nodo son los obtenidos al resolver el problema de contacto. De esta forma se conocerán los desplazamientos de todos los nodos de cada rueda dentada. Con estos datos puede obtenerse el valor de tensión o deformación en cualquier punto de cada rueda dentada mediante el postproceso habitual en el MEC [5].

### 3. RESULTADOS

El proceso de cálculo mostrado se ha implementado en Visual C#. Como parte de su validación se ha aplicado al problema de contacto de esferoides para poder ser comparado con resultados analíticos. El mallado de los esferoides se ha realizado mediante elementos lineales isoparamétricos triangulares. Como se indica en [7] los elementos lineales son los más adecuados para representar las superficies en contacto. En la figura 5 puede verse el mallado utilizado para los esferoides. En este caso se representa el esferoide en su estado deformado debido a la presión de contacto obtenida mediante el procedimiento aquí expuesto (los desplazamientos se han mayorado para hacerse más visibles).

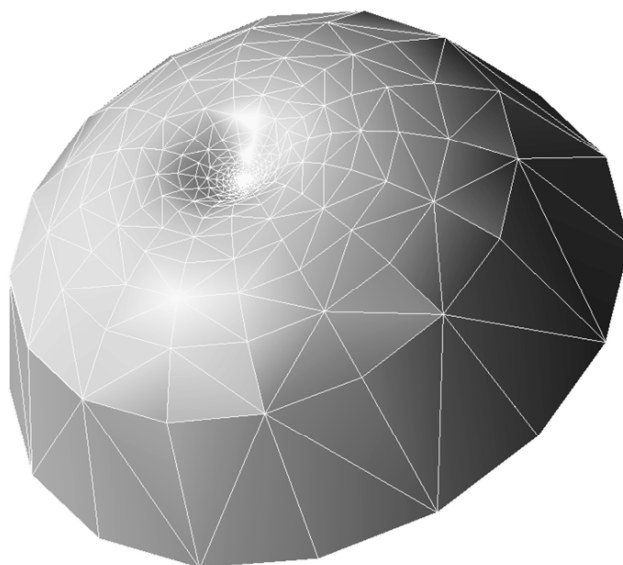


Figura 5. Esferoide deformado debido a la presión de contacto

Los resultados obtenidos se han comparado con los correspondientes obtenidos al aplicar la teoría de Hertz. Los resultados muestran una gran aproximación entre los valores de presión de contacto obtenidos analíticamente según la teoría de Hertz y los obtenidos mediante el método numérico descrito. La tabla 1 recoge los valores obtenidos al estudiar el caso de contacto entre dos esferas de  $R=200\text{mm}$  para diferentes valores de fuerza total de contacto.

Caso	Interferencia (mm)	Fuerza (N)	Área contacto (mm <sup>2</sup> )	Pmax Hertz (MPa)	Pmax MEC (MPa)	Error relativo (%)
1	1,64E-04	3,16E+00	0,05	92,04	93,28	-1,35%
2	1,64E-03	1,00E+02	0,52	291,08	290,88	0,07%
3	1,64E-02	3,16E+03	5,15	920,48	920,91	-0,05%
4	1,64E-01	1,00E+05	51,53	2910,82	2913,23	-0,08%
5	1,64E+00	3,16E+06	515,32	9204,82	9330,67	-1,37%

Tabla 1. Comparación de Presiones de contacto máximas teóricas (Hertz) y las obtenidas mediante el algoritmo descrito.

Puede verse que para un gran rango de fuerzas las diferencias con los valores teóricos no superan el 2%. La figura 6 recoge, para el caso 2 de la tabla 1, la distribución de presiones teórica (Hertz) y la obtenida mediante el procedimiento numérico.

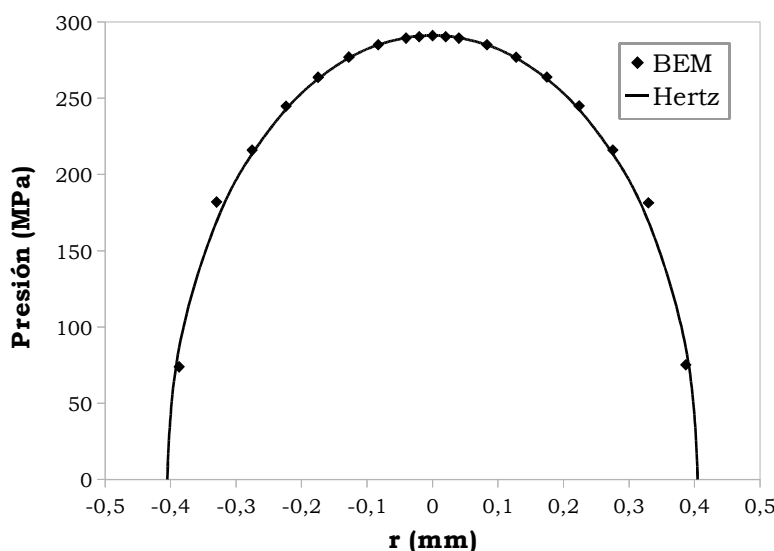


Figura 6. Presión de contacto obtenida con el algoritmo descrito y la teórica aplicando Hertz (caso 2)

Al tratarse de esferas la distribución sólo depende de la distancia al punto de contacto. Puede verse la gran aproximación obtenida entre los valores teóricos y los obtenidos mediante el método numérico propuesto.

#### 4. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

Se ha presentado una estrategia basada en el MEC enfocada al análisis tensional de transmisiones de engranajes. Se ha validado el núcleo central de la misma, la resolución del problema de contacto, mediante su aplicación al problema de contacto entre esferoides. Pero todavía se ha de validar la estrategia completa para transmisiones de engranajes. De los resultados obtenidos en [2] cabe esperar una buena aproximación al aplicarse la estrategia presentada a engranajes, puesto que las aproximaciones realizadas en ambos casos son equiparables. Este proceso de validación para diferentes tipos de transmisiones de engranajes se pospone para futuros trabajos.

**5. REFERENCIAS**

- [1] F. L. Litvin, A. Fuentes, *Gear Geometry and Applied Theory*, Cambridge University Press, (2004).
- [2] I. González, J. L. Iserte, A. Fuentes, *Implementation of Hertz theory and validation of a finite element model for stress analysis of gear drives with localized bearing contact*, *Mechanism and Machine Theory*, 46 (2011), 765–783
- [3] H. Hertz, *On the contact of elastic solids. Miscellaneous Papers by H. Hertz*, Eds. Jones and Schott (1896).
- [4] J. Argyris, A. Fuentes, F. L. Litvin, *Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 (2002), 1057–1095
- [5] G. Beer, I. Smith, C. Duenser, *The Boundary Element Method with Programming*, Springer-Verlag/Wien, (2008).
- [6] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, (1985).
- [7] K. Man, M.H. Aliabadi, *BEM frictional contact analysis: modeling considerations*. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 11 (1993), 77-85