

# Desgaste y fricción ortótropa en problemas de contacto 3D

L. Rodríguez-Tembleque Solano, R. Abascal García

Dpto. de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Universidad de Sevilla  
luisroteso@us.es

---

*Este artículo presenta una metodología para calcular el desgaste superficial que tiene lugar en problemas de contacto 3D, bajo leyes de desgaste y fricción ortótropas. Esta formulación está basada en los trabajos previos desarrollados por los autores, y emplea el Método de los Elementos Finitos (MEF) y/o el Método de los Elementos de Contorno (MEC) para el cálculo de los coeficientes de influencia elásticos, además de presentar el problema de contacto en base a una formulación Lagrangiana aumentada, con funciones de proyección para imponer las restricciones de contacto. El modelo de desgaste, así como la ley de fricción considerada están basados en una ley ortótropa. La metodología propuesta se ilustra mediante algunos ejemplos, en los que se presentan además algunos estudios sobre la influencia de la anisotropía en el desgaste.*

---

## 1. INTRODUCCIÓN

El desgaste es un fenómeno que está presente en la mayoría de los problemas de interacción mecánica superficial, y constituye una de las principales razones de inoperatividad en los componentes mecánicos. Su estimación permite a los ingenieros predecir la vida útil de un elemento mecánico, lo que ayuda a reducir costes de inoperancia, o permite obtener un diseño óptimo de estos componentes, mediante la elección de materiales, formas y acabados superficiales apropiados con las condiciones mecánicas, siempre persiguiendo la obtención de una alta durabilidad. Por tanto, la implicación económica de la predicción del desgaste puede ser de enorme valor para la industria.

Normalmente, en los modelos de contacto, las propiedades tribológicas (coeficientes de fricción y desgaste) se consideran isotropas: el coeficiente de fricción se supone que es constante e isotropo, al igual que la intensidad de desgaste (ley de desgaste de Holm-Archard [1, 2]). Esto es cierto cuando las superficies de contacto presentan una rugosidad uniforme e isotropa. Sin embargo, en un gran número de aplicaciones en ingeniería, la distribución de las asperezas y rugosidades en las superficies de los sólidos no son idénticas en todos los puntos. Por ejemplo, después de las operaciones de mecanizado, la mayoría de las superficies presentan patrones de estriación particulares, y las rugosidades y asperezas están claramente orientadas en la superficie. En estos casos, han de ser consideradas unas leyes de fricción y desgaste anisótropas. En particular, en un gran número de procesos de mecanizado, los patrones de estriaciones son mutuamente ortogonales entre sí (figura 1(a)). Para estos casos han de ser tenidos en cuenta unos modelos de fricción y desgaste particulares, tales como un modelo ortótropo, ya que proporcionarán una mejor descripción del comportamiento de fricción (figura 1(b)) y del desgaste que tiene lugar en las superficies de los sólidos.

Por tanto, este documento presenta una nueva metodología para calcular el desgaste superficial que es aplicable en problemas de contacto 3D, usando leyes de desgaste y fricción ortótropas. Esta formulación está basada en los trabajos [3, 4, 5, 6] desarrollados previamente por los autores. Emplea el Método de los Elementos Finitos (MEF) y/o el Método de los Elementos de Contorno (MEC) para el cálculo de los coeficientes de influencia elásticos, planteando el problema de contacto en base a una formulación Lagrangiana aumentada, con funciones de proyección para imponer las restricciones de contacto. El

modelo de desgaste anisótropo, así como la ley de fricción considerada están basados en [7, 8, 9, 10]. La metodología propuesta se ilustra mediante algunos ejemplos, en los que se presentan además algunos estudios sobre la influencia de la anisotropía en el desgaste.

## 2. CONTACTO ANISÓTROPO

Para considerar el contacto entre dos sólidos  $\Omega^\alpha$  ( $\alpha=1, 2$ ) discretizados mediante el MEC y/o el MEF, hemos de determinar la separación entre cada pareja  $I$  de nodos en contacto

$$(\mathbf{k})_I = (\mathbf{k}_{go})_I + (\mathbf{d}^2)_I - (\mathbf{d}^1)_I \quad (1)$$

donde  $\mathbf{k}$  es el vector que contiene las separaciones de las parejas  $I$  de contacto,  $\mathbf{k}_{go}$  es el vector que contiene las separaciones geométricas iniciales de las parejas de contacto y el movimiento relativo entre los sólidos [3-6], y  $\mathbf{d}^\alpha$  es el vector que contiene los desplazamientos nodales del sólido  $\Omega^\alpha$  ( $\alpha=1, 2$ ) debido a la aplicación de las cargas.

Las restricciones de contacto para cada pareja  $I$  pueden resumirse en tres: la *condición de no interpenetración*, la *ley de fricción anisótropa* y el *principio de máxima disipación de energía*. Las expresiones matemáticas de estas restricciones de contacto pueden agruparse en dos grupos: restricciones de contacto normal y contacto tangencial.

Las restricciones de contacto normal tienen en cuenta la condición de no interpenetración de los sólidos y la complementariedad de las variables de contacto normal:

$$(\mathbf{k}_n)_I \geq 0 \quad ; \quad (\mathbf{p}_n)_I \leq 0 \quad ; \quad (\mathbf{k}_n)_I (\mathbf{p}_n)_I = 0 \quad (2)$$

donde  $\mathbf{p}_n$  es el vector que contiene las tracciones normales de los nodos de contacto.

En el caso de las restricciones de contacto tangencial, la ley de fricción y el principio de máxima disipación se garantizan imponiendo que las separaciones tangenciales  $\mathbf{k}_t$  y las tracciones tangenciales  $\mathbf{p}_t$  satisfagan:

$$\|(\mathbf{p}_t)_I\|_\mu \leq |(\mathbf{p}_n)_I| \quad ; \quad (\mathbf{k}_t)_I = -\lambda (\mathbf{p}_t)_I \quad ; \quad \lambda \geq 0 \quad ; \quad (\mathbf{k}_t)_I (\|(\mathbf{p}_t)_I\|_\mu - |(\mathbf{p}_n)_I|) = 0 \quad (3)$$

siendo la norma elíptica

$$\|(\mathbf{p}_t)_I\|_\mu = \sqrt{\left(\frac{(\mathbf{p}_{t_{e_1}})_I}{\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{(\mathbf{p}_{t_{e_2}})_I}{\mu_2}\right)^2} \quad (4)$$

y,  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , los coeficientes de fricción en las direcciones principales  $\{e_1, e_2\}$  (figura 1).

Las restricciones de contacto (2) y (3) para cada pareja  $I$  pueden expresarse de forma discreta como [5]

$$(\Lambda_t)_I - \text{Proj}_{E_p} \{(\Lambda_t^*)_I\} = \mathbf{0} \quad ; \quad (\Lambda_n)_I - \text{Proj}_{E_n} \{(\Lambda_n^*)_I\} = \mathbf{0} \quad (5)$$

siendo  $(\Lambda_t^*)_I$  y  $(\Lambda_n^*)_I$  las variables aumentadas,

$$(\Lambda_t^*)_I = (\Lambda_t)_I - r_t \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} (\mathbf{k}_n)_I \quad ; \quad (\Lambda_n^*)_I = (\Lambda_n)_I + r_n (\mathbf{k}_n)_I \quad (6)$$

y  $\text{Proj}_{E_p}$  y  $\text{Proj}_{E_n}$  las funciones de proyección tangencial y normal, definidas en [5].

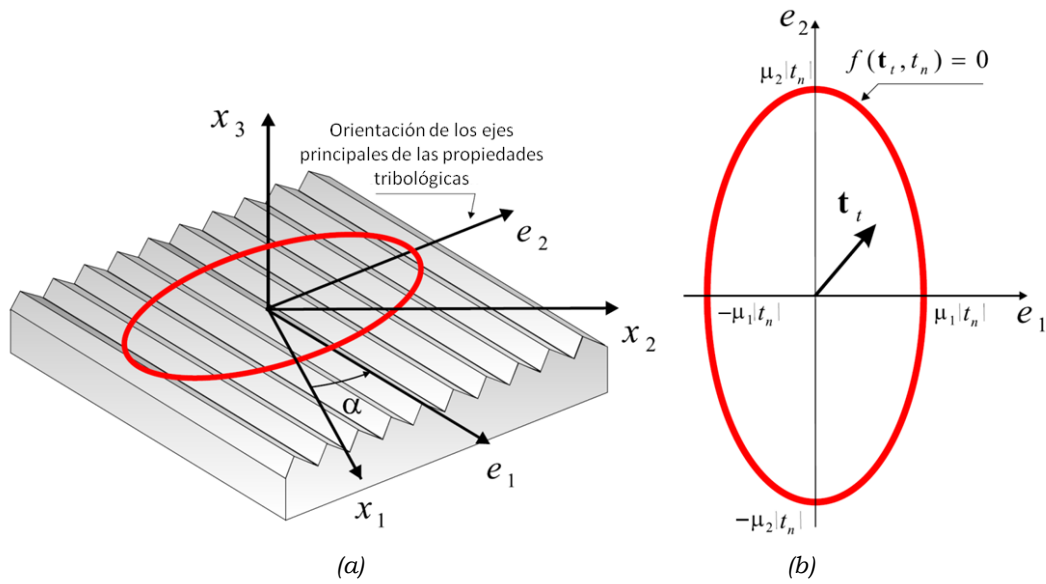


Figura 1. (a) Superficie ortótropa con estrías. (b) Ley de fricción ortótropa.

### 3. ACOPLAMIENTO MEC-MEF

En el caso de modelar el problema de desgaste entre dos sólidos  $\Omega^\alpha$  ( $\alpha=1,2$ ) en contacto empleando el MEF, las ecuaciones de acoplamiento entre ambos dominios se pueden escribir de forma análoga a [3-6]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & \mathbf{0} & \mathbf{C}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^2 & -\mathbf{C}^2 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}^1)^T & -(\mathbf{C}^2)^T & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^1 \\ \mathbf{d}^2 \\ \Lambda \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{C}_g \mathbf{k}_{go} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

En la ecuación (7), los dos primeros grupos de filas representan las ecuaciones de equilibrio de cada sólido libre, y el último grupo de filas representa las ecuaciones de compatibilidad entre ambos sólidos. Las incógnitas nodales del problema son los desplazamientos de cada sólido  $\Omega^\alpha$ ,  $\mathbf{d}^\alpha$  ( $\alpha=1,2$ ), los multiplicadores de Lagrange  $\Lambda$ , y las separaciones de los nodos de la zona de contacto potencial  $\mathbf{k}$ . Los términos de la matriz en (7) están definidos en [3-6].

En el caso de aproximarse ambos sólidos mediante el MEC, las ecuaciones de contacto MEC-MEC análoga a (7) pasa a escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_x^1 & \mathbf{0} & \mathbf{A}_p^1 \tilde{\mathbf{C}}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_x^2 & -\mathbf{A}_p^2 \tilde{\mathbf{C}}^2 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}^1)^T & -(\mathbf{C}^2)^T & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \Lambda \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{C}_g \mathbf{k}_{go} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

En este caso las incógnitas nodales del problema son las correspondientes al contorno del sólido  $\Omega^\alpha$ , desplazamientos y tracciones sin incluir la zona de contacto potencial  $\mathbf{x}^\alpha$  ( $\alpha=1,2$ ), las separaciones de los nodos de la zona de contacto potencial  $\mathbf{k}$ , y  $\Lambda$  los multiplicadores de Lagrange que, en este caso, son las tracciones nodales de contacto.

En el caso de aproximarse el sólido  $\Omega^1$  mediante el MEF y el sólido  $\Omega^2$  con el MEC, las ecuaciones de contacto MEF-MEC quedan, de acuerdo con [3], como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & \mathbf{0} & \mathbf{M}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_x^2 & -\mathbf{A}_p^2 \tilde{\mathbf{C}}^2 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}^1)^T & -(\mathbf{C}^2)^T & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{C}_g \mathbf{k}_{go} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

siendo  $\mathbf{\Lambda}$  las tracciones de contacto y  $\mathbf{M}^1$  una matriz, definida en [3], que permite transformar las tracciones nodales de contacto en fuerzas.

Por tanto, en el caso de aproximarse uno de los sólidos mediante el MEF y el otro mediante el MEC, las ecuaciones (7), (8) y (9) se pueden expresar como:

$$\mathbf{R}^1 \mathbf{d}^1 + \mathbf{R}^2 \mathbf{x}^2 + \mathbf{R}_\lambda \mathbf{\Lambda} + \mathbf{R}_g \mathbf{k} = \mathbf{F} \quad (10)$$

#### 4. DESGASTE ANISÓTROPO

El desgaste producido sobre la superficie de los sólidos se cuantifica mediante la variable profundidad de desgaste  $\mathbf{w}$ . Este aumento del desgaste incrementa la separación normal entre las superficies de los sólidos, por lo que la separación entre los sólidos (1) en el instante o paso de carga ( $k$ ) se transforma en la expresión

$$(\mathbf{k}^{(k)})_I = (\mathbf{k}_{go}^{(k)})_I + (\mathbf{d}^{2(k)})_I - (\mathbf{d}^{1(k)})_I + (\mathbf{C}_{gn} \mathbf{w}^{(k)})_I \quad (11)$$

donde  $\mathbf{w}$  es el vector que contiene la profundidad de desgaste de las parejas  $I$  de nodos en contacto. De esta forma, la ecuación (10), para el paso de carga ( $k$ ), pasa a ser

$$\mathbf{R}^1 \mathbf{d}^{1(k)} + \mathbf{R}^2 \mathbf{x}^{2(k)} + \mathbf{R}_\lambda \mathbf{\Lambda}^{(k)} + \mathbf{R}_g \mathbf{k}^{(k)} = \mathbf{F} + \mathbf{R}_g \mathbf{C}_{gn} \mathbf{w}^{(k)} \quad (12)$$

La evolución de la profundidad de desgaste para cada paso de carga ( $k$ ) puede calcularse como

$$(\mathbf{w}^{(k)})_I = (\mathbf{w}^{(k-1)})_I + (\mathbf{\Lambda}_n^{(k)})_I \left\| (\mathbf{k}_t^{(k)})_I - (\mathbf{k}_t^{(k-1)})_I \right\|_i \quad (13)$$

habiéndose definido la norma de intensidad de desgaste, de acuerdo con [5], como

$$\left\| \mathbf{f} \right\|_i = \sqrt{(i_1 f_{e_1})^2 + (i_2 f_{e_2})^2} \quad (14)$$

Las constantes  $i_1$  e  $i_2$  son los coeficientes de intensidad de desgaste en direcciones principales, cuyos valores son determinados experimentalmente y están íntimamente relacionados con propiedades superficiales de los sólidos en contacto.

#### 5. METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN

La resolución del sistema de ecuaciones constituido por las expresiones (5-10) y su integración cuasi-temporal, se va a realizar planteado un esquema iterativo del tipo Uzawa, como se muestra a continuación, tomando como ejemplo el contacto MEF-MEC (9).

Supongamos que nos encontramos en el paso de carga ( $k-1$ ) donde son conocidas todas las incógnitas del problema, y se desea obtener sus valores en el siguiente paso de carga ( $k$ ). En ese caso, realizamos el siguiente esquema iterativo con índice ( $n$ ):

- (I) Inicializamos las tracciones de contacto, la profundidad de contacto y la profundidad de desgaste:  $\Lambda^{(n-1)} = \Lambda^{(k-1)}$ ;  $\mathbf{w}^{(n-1)} = \mathbf{w}^{(k-1)}$ .
- (II) Resolvemos el sistema:

$$\mathbf{R}^1 \mathbf{x}^1 + \mathbf{R}^2 \mathbf{x}^2 + \mathbf{R}_g \mathbf{k}^{(n)} = -\mathbf{R}_\lambda \Lambda^{(n-1)} + \mathbf{R}_g \mathbf{C}_{gn} \mathbf{w}^{(n-1)} + \mathbf{F} \quad (15)$$

- (III) Proyectamos las tracciones y calculamos el desgaste:

$$(\Lambda^{(n)})_I = \text{Proj}\{(\Lambda^{*(n-1)})_I\} \quad (16)$$

$$(\mathbf{w}^{(n)})_I = (\mathbf{w}^{(k-1)})_I + (\Lambda_n^{(n)})_I \left\| (\mathbf{k}_t^{(n)})_I - (\mathbf{k}_t^{(k-1)})_I \right\|_i \quad (17)$$

siendo,

$$(\Lambda_t^{*(n)})_I = (\Lambda_t^{(n-1)})_I - r_t \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \left( (\mathbf{k}_t^{(n)})_I - (\mathbf{k}_t^{(k-1)})_I \right) \quad (18)$$

$$(\Lambda_n^{*(n)})_I = (\Lambda_n^{(n-1)})_I + r_n (\mathbf{k}_n^{(n)})_I \quad (19)$$

- (IV) Evaluamos la función error:

$$\psi = \left\| \Lambda^{(n)} - \Lambda^{(n-1)} \right\| \quad (20)$$

- (V) Si  $\Psi < \varepsilon$ , entonces hemos resuelto las variables en el instante ( $k$ ). En caso contrario, evaluamos:  $\Lambda^{(n-1)} = \Lambda^{(n)}$ ;  $\mathbf{w}^{(n-1)} = \mathbf{w}^{(n)}$ , y volvemos al paso (II).

Procediendo como se ha expuesto podemos avanzar al siguiente paso de carga resolviendo el desgaste para cada paso ( $k$ ).

## 6. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Se ha considerado el problema de indentación de un punzón esférico rígido sobre un bloque elástico. El radio del punzón es  $R=100$  m, y las dimensiones del bloque son:  $L_0=0.1$  m,  $L_2=L_1=1$  m (véase la figura 2(a)). Las propiedades de los materiales que se consideran son: módulo de Young,  $E = 210$  GPa, y coeficiente de Poisson,  $\nu = 0.3$ .

El dominio se discretiza mediante elementos de contorno cuadriláteros lineales. Empleando  $20 \times 20$  elementos en la zona de contacto potencial. La carga aplicada es una indentación de  $0.07$  mm, que se realiza en 40 pasos de carga.

Para constatar la influencia de la anisotropía en el desgaste se van a considerar tres modelos de fricción y desgaste anisótropos (ver figura 2(b)): (a) modelo isótropo ( $\mu_1 = \mu_2 = 0.3$  e  $\dot{i}_1 = \dot{i}_2 = 10 \times 10^{-12}$  Pa $^{-1}$ ), (b) ortótropo ( $\mu_1 = 0.2$ ,  $\mu_2 = 0.3$ ,  $\dot{i}_1 = 6.66 \times 10^{-12}$  Pa $^{-1}$  e  $\dot{i}_2 = 10 \times 10^{-12}$  Pa $^{-1}$ ) y (c) ortótropo ( $\mu_1 = 0.1$ ,  $\mu_2 = 0.3$ ,  $\dot{i}_1 = 3.33 \times 10^{-12}$  Pa $^{-1}$  e  $\dot{i}_2 = 10 \times 10^{-12}$  Pa $^{-1}$ ). Las figuras 3 (a-c) muestran la distribución de la profundidad de desgaste resultante en cada caso. Podemos ver cómo el nivel de la anisotropía en las propiedades tribológicas afecta a la intensidad de desgaste, así como a su distribución en la zona de contacto. De esta manera,

se puede observar cómo en la figura 2 (c) la intensidad del desgaste en  $x_1 = 0$  es cuatro veces mayor que el de  $x_2 = 0$ .

Los ejemplos han sido resueltos mediante el algoritmo propuesto, considerando  $r_n = 10^{12}$  y  $r_t = 10^{13}$  para la penalización de las variables Lagrangianas aumentadas [5], y  $\varepsilon = 10^{-2}$  como un límite de tolerancia del error. Los parámetros  $r_n$  y  $r_t$  no pueden tomar valores mayores debido a que podría volverse inestable el algoritmo de resolución.

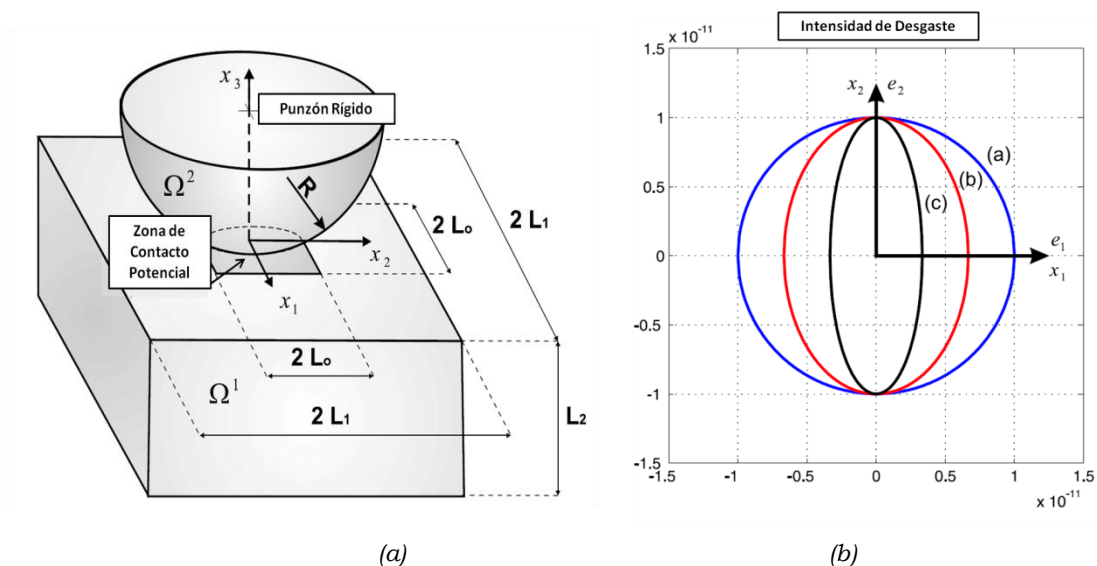


Figura 2. (a) Indentación de un punzón rígido sobre un bloque elástico. (b) Leyes de desgaste consideradas representadas en diagrama polar: (a) modelo isótropo ( $i_1 = i_2 = 10 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$ ), (b) ortótropo ( $i_1 = 6.66 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$  e  $i_2 = 10 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$ ) y (c) ortótropo ( $i_1 = 3.33 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$  e  $i_2 = 10 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$ ).

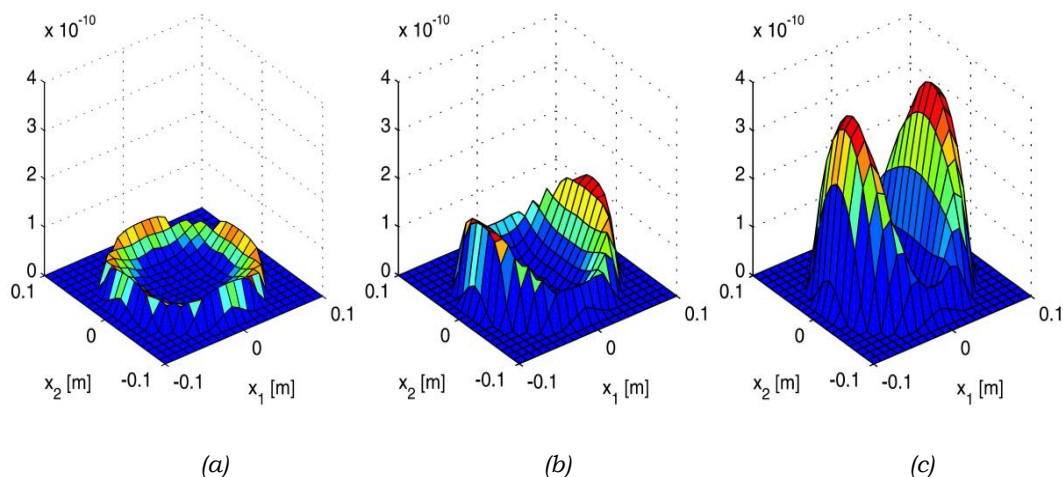


Figura 3. Distribución de la profundidad de desgaste: (a) modelo isótropo ( $i_1 = i_2 = 10 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$ ), (b) ortótropo ( $i_1 = 6.66 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$  e  $i_2 = 10 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$ ) y (c) ortótropo ( $i_1 = 3.33 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$  e  $i_2 = 10 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$ ).

## 7. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Este trabajo presenta una nueva formulación numérica para resolver problemas 3D de desgaste anisótropo incluyendo contacto con fricción. La metodología se basa en una formulación Lagrangiana aumentada, que emplea un esquema de resolución predictor-

corrector del tipo Uzawa. Esta metodología se ha aplicado para calcular el desgaste en un problema de contacto incremental que presenta deslizamiento parcial. Todos los estudios presentados muestran la importancia de considerar el desgaste en el proceso de contacto debido a su influencia en las variables de contacto. Además, se ha observado que cuando la rugosidad de las superficies no es idéntica en todos los puntos ha de ser considerada una ley de fricción anisótropa conjuntamente con las leyes de desgaste. En otro caso, se podría sobrestimar o subestimar las magnitudes de desgaste y su distribución sobre la zona de contacto, como se muestra en los ejemplos numéricos presentados.

## 8. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia de España, a través del proyecto DPI2010-19331, cofinanciado con fondos FEDER.

## 9. REFERENCIAS

- [1] R. Holm. *Electric Contacts*. Almquist and Wiksells Akademiska Handböcker. Stockholm, (1946).
- [2] J.F. Archard. Contact and rubbing of flat surfaces, *J. Appl. Phys.*, 24 (1953), 981-988.
- [3] L. Rodríguez-Tembleque, R. Abascal. A FEM-BEM fast methodology for 3D frictional contact problems, *Comput. Struct.*, 88 (2010), 924-937.
- [4] L. Rodríguez-Tembleque, R. Abascal, M.H. Aliabadi. A boundary element formulation for wear modeling on 3D contact and rolling-contact problems, *Int. J. Solids Struct.*, 47 (2010), 2600-2612.
- [5] L. Rodríguez-Tembleque, R. Abascal, M.H. Aliabadi. A boundary element formulation for 3D fretting-wear problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 35 (2011), 935-943.
- [6] L. Rodríguez-Tembleque, R. Abascal, M.H. Aliabadi. Anisotropic wear framework for 3D contact and rolling problems, *Comput. Method. Appl. M.*, (2012), DOI: 10.1016/j.cma.2012.05.025 (<http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2012.05.025>).
- [7] Z. Mróz, S. Stupkiewicz. An anisotropic friction and wear model, *Int. J. Solids Struct.*, 31 (1994), 1113-1131.
- [8] A. Zimitrowicz. Constitutive equations for anisotropic wear, *Int. J. Engng. Sci.*, 31 (1993), 509-528.
- [9] A. Zimitrowicz. Models of kinematics dependent anisotropic and heterogeneous friction, *Int. J. Solids Struct.*, 43 (2006), 4407-4451.
- [10] A. Zimitrowicz. Contact stress: a short survey of models and methods of computations, *Arch. Comput. Methods*, 80 (2010), 1407-1428.