

Diseño óptimo de topología en estructuras de máxima rigidez mediante el método SERA

C. Alonso Gordo⁽¹⁾, R. Ansola Loyola⁽¹⁾, O.M. Querin⁽²⁾, J. Canales Abaitua⁽¹⁾

(1) Dpto. de Ingeniería Mecánica. Universidad del País Vasco
calonso015@ikasle.ehu.es

(2) Dpto. de Ingeniería Mecánica. Universidad de Leeds

La optimización de topología está reconocida como una práctica herramienta de diseño y son muchos los métodos que han sido desarrollados para este fin. Entre ellos, el método SERA (Sequential Element Rejection and Admission) es un método de eliminación y admisión de elementos que ha demostrado ser eficaz para el diseño de estructuras en base a la tensión en los elementos (Full Stressed Design). El SERA difiere de otros métodos “evolutivos” en que considera de manera independiente los elementos llenos (material ‘real’) y vacíos (material ‘virtual’). Un método alternativo para el diseño de estructuras es definir el problema como una minimización de su energía de deformación (flexibilidad), es decir, una maximización de su rigidez, planteamiento que no se ha abordado aún mediante el método de adición y eliminación que aquí se propone. En el presente artículo se desarrolla el método SERA para el diseño de estructuras de máxima rigidez sujeto a equilibrio estático y una restricción de volumen. Los valores que definen la eliminación o admisión de elementos se obtienen a través de un análisis de sensibilidad de la función objetivo. Un filtrado de dichos valores evita la aparición de problemas relacionados con el “checkerboard” y la dependencia de la malla. La validez del método propuesto se muestra a través de problemas clásicos, frecuentemente empleados para comprobar la efectividad del proceso de optimización.

1. INTRODUCCIÓN

El diseño estructural se basaba en métodos de prueba y error hasta que la idea de introducir procedimientos más sistemáticos al proceso de diseño suscitó el interés de numerosos investigadores [1][2]. Las técnicas de optimización topológica se basan en la idea de distribuir una cantidad predeterminada de material en un recinto definido de tal forma que se maximice o minimice una función objetivo y se cumplan una serie de restricciones. La gran ventaja de la optimización de topología es que la forma y conectividad de los elementos pueden ser desconocidas a priori.

En la literatura se pueden encontrar multitud de métodos de optimización de topología. El método pionero fue el método de homogeneización [3] que define el material como un número infinito de celdas microscópicas periódicas que combinan varios grados de sólido y vacío. Sin embargo, el método más empleado en la actualidad es el método SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) [4] donde las propiedades efectivas de cada elemento se definen como la densidad elevada a un valor penalizador de densidades intermedias y multiplicado por las propiedades del material sólido isótropo. Desde comienzos de los años noventa, se han propuesto numerosos métodos heurísticos. Destacan, entre otros, los algoritmos genéticos [5], el método Level Set [6] y los métodos evolutivos ESO (Evolutionary Structural Optimization) [7].

Respecto a los métodos evolutivos, existen en la literatura diversos desarrollos del método inicial (basado exclusivamente en la eliminación de material) que permiten tanto añadir como eliminar elementos del dominio de diseño [8][9]. Entre ellos, el método SERA [9] difiere del resto de métodos de naturaleza bi-direccional en que considera de manera independiente los elementos llenos y vacíos, demostrando ser eficaz para el diseño de estructuras en base a la tensión en los elementos (Full Stressed Design)[10].

El objetivo de este trabajo es la aplicación del método SERA al diseño de estructuras de máxima rigidez definiendo el problema como una minimización de la energía de deformación de la estructura. El proceso de diseño incluye un análisis de sensibilidad que permite determinar los elementos a añadir o eliminar del dominio de trabajo mediante dos criterios separados. La validez del método SERA se muestra mediante dos problemas clásicos que permiten demostrar cómo el procedimiento de optimización converge a topologías en las que el material está eficientemente distribuido.

2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El objetivo de la optimización de topología es encontrar la distribución óptima de material que, por un lado, satisface las restricciones impuestas y, por otro lado, maximiza o minimiza la función objetivo. En este trabajo, el problema se formula como una maximización de la rigidez, equivalente a la minimización de la flexibilidad. Además, se impone una restricción a la máxima cantidad de material a emplear. Matemáticamente, el objetivo de minimizar la flexibilidad de una estructura se obtiene a través de una minimización de la energía de deformación U_D (1) sujeto a una fracción de volumen de material objetivo V^* (2).

$$\text{minimizar: } U_D = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \quad (1)$$

$$\text{sujeto a: } V(\rho_e) = \sum_{e=1}^N \rho_e \leq V^*, \quad \rho_e = \{\rho_{\min}, 1\}, \quad e = 1, \dots, N \quad (2)$$

donde: ρ_e es la densidad de cada elemento e , N el número de elementos finitos, ρ_{\min} es la densidad mínima de cada elemento con valor típico de $\rho_{\min}=10^{-4}$.

La energía de deformación U_D se define según la ecuación (3) y el problema de elementos finitos a resolver para poder calcular dicha energía de deformación viene dado en la ecuación (4). El vector de fuerzas \mathbf{F} es el que contiene la fuerza F_{in} aplicada en un punto del dominio definido P_{in} , Figura 1.

$$U_D = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \quad (3)$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (4)$$

donde: \mathbf{U} es el vector de desplazamientos nodales, \mathbf{K} es la matriz de rigidez y \mathbf{F} es el vector de fuerzas nodales que contiene la carga F_{in} .

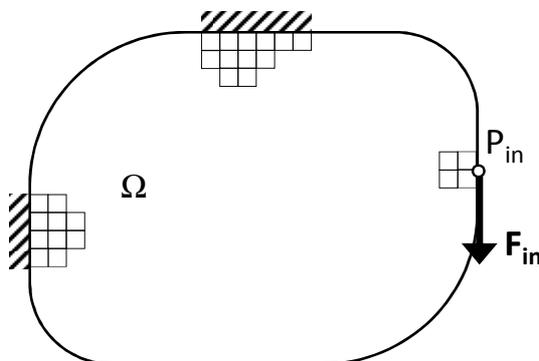


Figura 1 Definición del problema de optimización estructural

Como parte del proceso de optimización, se realiza un análisis de sensibilidad. Este análisis consiste en el cálculo de las variaciones de la respuesta de la estructura a las cargas aplicadas cuando se modifican las variables de diseño, en este caso, la densidad en cada

elemento. El gradiente en cada elemento α_e será el empleado para decidir los elementos a eliminar o añadir en la presente iteración.

En la ecuación (5) se deriva la función objetivo respecto a las variables de diseño.

$$\alpha = \frac{\partial U_D}{\partial \rho_e} = \frac{\partial}{\partial \rho_e} \left(\frac{1}{2} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} \right) \quad (5)$$

El primer sumando se desarrolla en la ecuación (6).

$$\frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{U})^T \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} = \text{como } K \text{ es simétrica} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} \quad (6)$$

La ecuación de equilibrio definida en (4) se deriva respecto a las variables de diseño (7). La derivada del vector de fuerzas es cero ya que la carga aplicada es independiente de la densidad en cada elemento.

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \rho_e} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} = -\mathbf{K} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} \quad (7)$$

Introduciendo (6) y (7) en la expresión obtenida de la derivada de la función objetivo, se obtiene el valor de la sensibilidad (8).

$$\alpha = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{U} \quad (8)$$

Esta expresión refleja que cuando se añade material y por tanto aumenta la densidad, aumenta la rigidez o lo que es equivalente, se reduce la energía de deformación.

Cada valor de densidad corresponde a un único elemento de la malla de elementos finitos y por lo tanto, en el cálculo sólo intervienen la matriz de rigidez del elemento y los desplazamientos de éste. Así mismo, la derivada de la matriz de rigidez sólo se puede aproximar a su variación entre iteraciones ya que la variable de diseño es discreta (la densidad de un elemento sólo puede ser la 1 ó ρ_{\min}). Se obtiene así la expresión de la densidad en cada elemento (9).

$$\alpha_e = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{U}_e^T \cdot \Delta \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{U}_e \quad (9)$$

El valor de la sensibilidad en cada elemento (9) es el que determina si ese elemento cambia de estado 'real' a 'virtual' o viceversa.

3. EL MÉTODO SERA

El método SERA [9] es un método de eliminación y admisión de elementos que considera dos modelos de material separados: 1) material 'real' y 2) material 'virtual' con densidad despreciable. Dos criterios separados para la eliminación y admisión de elementos permiten que el material se redistribuya entre 'real' y 'virtual' y viceversa. La topología óptima está formada por todo aquel material 'real' presente en el dominio de diseño al final del proceso de optimización.

El método SERA se ha empleado hasta ahora para el diseño de estructuras en base a la tensión en los elementos. Para su aplicación al diseño de estructuras de mínima energía de deformación, el criterio de selección de elementos se modifica. Ya no se seleccionan elementos en base a su tensión sino en base a su sensibilidad respecto de la energía de deformación de la estructura. El concepto de dos modelos de materiales distintos y criterios separados se mantiene.

Los doce pasos del método SERA para del diseño de estructuras de máxima rigidez se presenta a continuación y se muestra en la Figura 2.

1. Definir el problema de diseño. Se define el dominio de diseño y se malla con elementos finitos. Las restricciones, cargas y fracción de volumen objetivo V^* se debe definir.
2. Asignar propiedades 'real' y 'virtual' al dominio de diseño inicial. Para los elementos presentes en el dominio se asignan propiedades de material 'real' y para los elementos del dominio vacíos se asignan propiedades de material 'virtual'.
3. Calcular la variación de volumen en la iteración que consiste en el correspondiente volumen que se desea añadir $\Delta V_A(i)$ y el correspondiente volumen a eliminar $\Delta V_E(i)$.
4. Calcular el problema de elementos finitos. Se obtienen el vector de desplazamientos global \mathbf{U} y las matrices de rigidez elemental \mathbf{K}_e y global \mathbf{K} .
5. Calcular la sensibilidad en cada elemento α_e (9).
6. Aplicar el filtro de sensibilidades [11].
7. Separar las sensibilidades en distintas listas para los valores que se refieren a material 'real' y los que se refieren a material 'virtual', α_R y α_V .
8. Definir los valores límites (threshold) de sensibilidad 'real' y 'virtual', α^{th}_R y α^{th}_V . Estos valores son aquellos que permiten la eliminación y admisión de los volúmenes ya definidos $\Delta V_E(i)$ y $\Delta V_A(i)$.
9. Eliminar y añadir elementos, sub-apartado 3.1.
10. Calcular el volumen de material 'real' en el dominio de diseño.
11. Calcular el criterio de convergencia ϵ_i para la presente iteración i (10). Valores típicos de ϵ_i están en un rango de 0.001 y 0.01.

$$\epsilon_i = \frac{|\sum_{i=5}^i \mathbf{U}_D(i) - \sum_{i=4}^i \mathbf{U}_D(i)|}{\sum_{i=4}^i \mathbf{U}_D(i)} \tag{10}$$

12. Repetir los pasos 3) al 11) hasta que se alcance el volumen objetivo y el problema converja. La topología final es la que forma el material 'real' presente en el dominio de diseño al final del proceso de optimización.

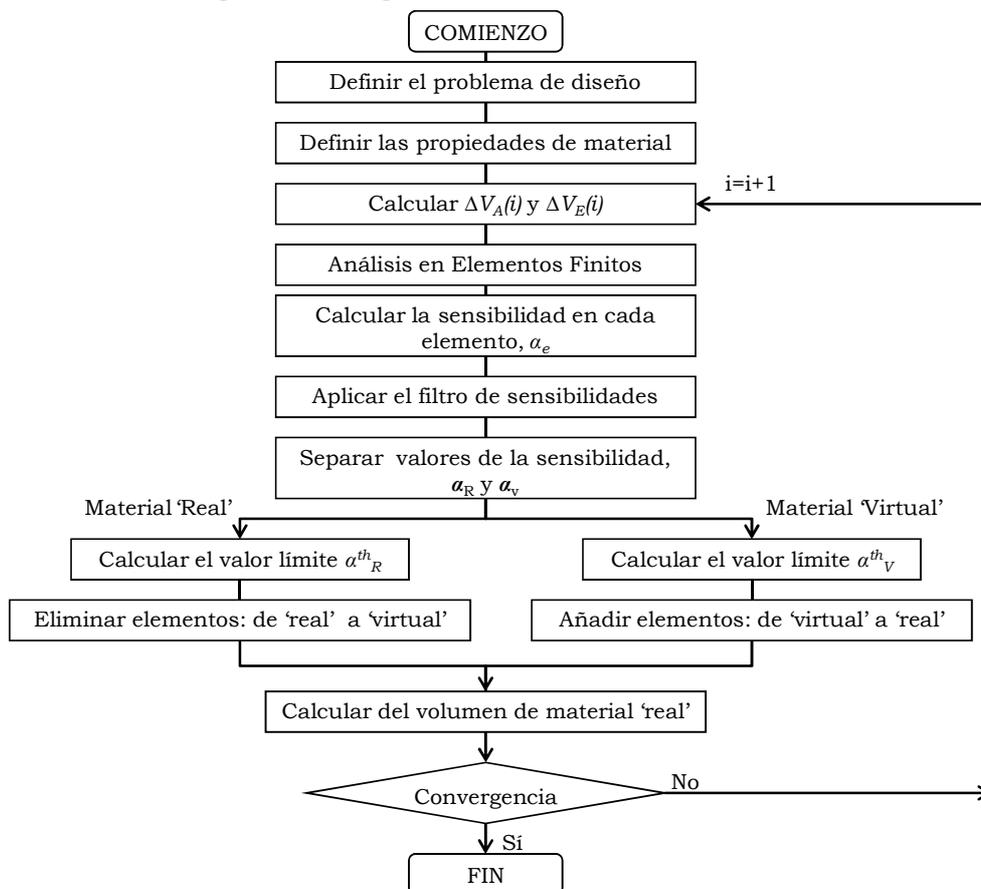


Figura 2 Diagrama de flujo del método SERA para estructuras de máxima rigidez

3.1. Eliminar y añadir elementos

La sensibilidad en cada elemento (9) es una función de la variación de la matriz de rigidez elemental $\Delta \mathbf{K}_e$, cuyo valor depende de si un elemento se elimina o añade al dominio de diseño (11).

$$\Delta \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(i) - \mathbf{K}_e(i-1) \quad (11)$$

donde: $\mathbf{K}_e(i)$ es la matriz de rigidez elemental en la iteración i ; y $\mathbf{K}_e(i-1)$ es la matriz de rigidez elemental en la iteración $(i-1)$.

Si se añade un elemento, $\mathbf{K}_e(i) = \mathbf{K}_e$ y $\mathbf{K}_e(i-1) \approx 0$, por lo que la variación de rigidez es $\Delta \mathbf{K}_e(i) = \mathbf{K}_e$. Sin embargo, si se elimina un elemento, $\mathbf{K}_e(i) \approx 0$ y $\mathbf{K}_e(i-1) = \mathbf{K}_e$, y $\Delta \mathbf{K}_e(i) = -\mathbf{K}_e$. Por lo tanto, el valor de la sensibilidad elemental para el material 'real' y 'virtual' es el definido en las ecuaciones (12) y (13).

$$\alpha_{eR} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{U}_e^T \cdot \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{U}_e \quad (12)$$

$$\alpha_{eV} = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{U}_e^T \cdot \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{U}_e \quad (13)$$

Como el objetivo es minimizar la energía de deformación, los elementos con menor valor de sensibilidad son los que se añaden y eliminan (Figura 3). Es importante resaltar que la eliminación de elementos con menor valor α_R es equivalente a eliminar los elementos con mayor valor si el signo de la expresión (12) se invierte de tal forma que la ecuación para obtener la sensibilidad en cada elemento es la misma independientemente del tipo de material.

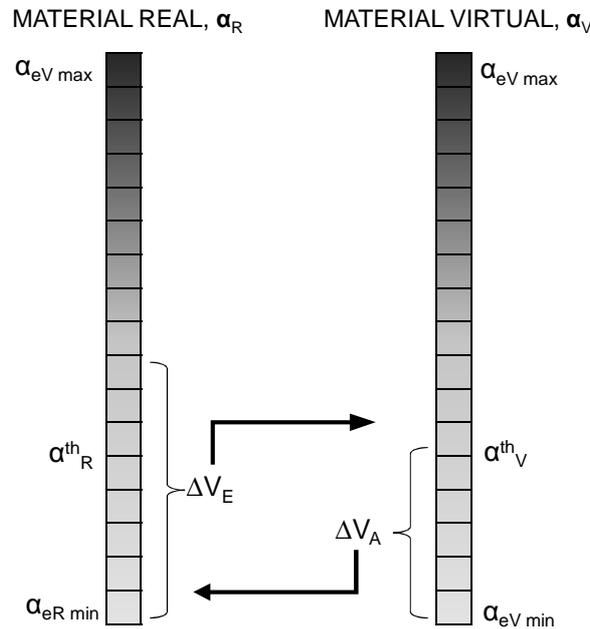


Figura 3 Esquema de las listas de material 'real' y 'virtual' y los volúmenes a añadir y eliminar

4. EJEMPLOS

La validez del método propuesto se muestra mediante dos problemas clásicos: 1) Viga en voladizo con carga en el extremo y 2) viga biapoyada de Michell.

Las propiedades del material son las mismas en todos los ejemplos. El módulo de Young es $E=200\text{GPa}$ y el coeficiente de Poisson $\nu=0.3$. La densidad del material 'virtual' es $\rho_{\min}=10^{-4}$, lo que equivale al 0.01% del material 'real'.

4.1. Viga en voladizo con carga en el extremo

El dominio de diseño de una viga en voladizo se muestra en la Figura 4. Es un rectángulo de 200x100mm subdividido en elementos finitos cuadrados de tamaño 2x2mm. Se aplica una carga de valor $F_{in}=1N$ en el extremo opuesto al lado empotrado y centrada. Se consideran tres casos distintos de fracción de volumen objetivo: a) $V^*=0.2$, b) $V^*=0.35$ y c) $V^*=0.5$.

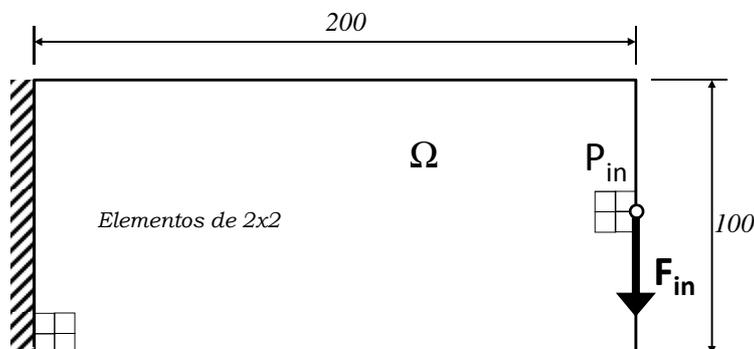


Figura 4 Viga en voladizo con carga en el extremo central (en mm)

En la Figura 5 se pueden observar las topologías obtenidas para los tres casos planteados. Como se puede observar, el método SERA distribuye eficientemente el material con el objetivo de maximizar la rigidez de la estructura manteniendo la restricción del volumen máximo permitido.



Figura 5 Viga en voladizo con carga en el extremo para a) $V^*=0.2$, b) $V^*=0.35$ and c) $V^*=0.5$

4.2. Viga biapoyada de Michell

El dominio de diseño de una viga biapoyada se muestra en la Figura 6. Es un rectángulo de tamaño 400x200mm subdividido con elementos finitos cuadrados. Se aplica una carga de valor $F_{in}=1N$ y se define una fracción de volumen objetivo $V^*=0.4$.

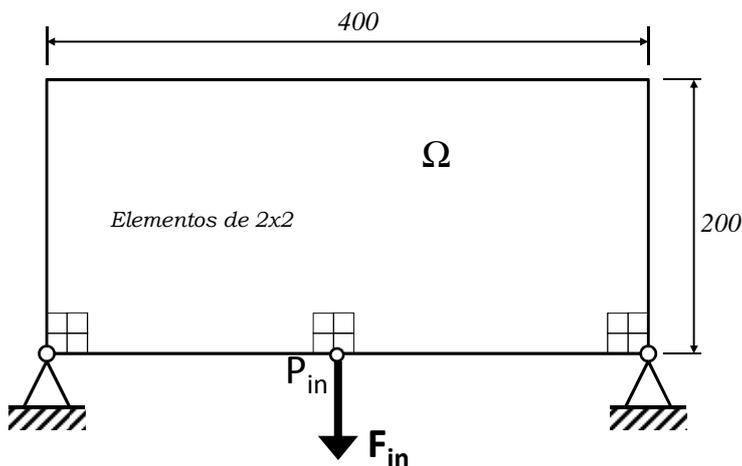


Figura 6 Viga biapoyada de Michell (en mm)

En la Figura 7 se presenta la evolución del proceso de optimización. La fracción de volumen y la función objetivo se muestra para cada iteración. Además, se incluye la topología en distintas etapas del proceso y la topología óptima final.

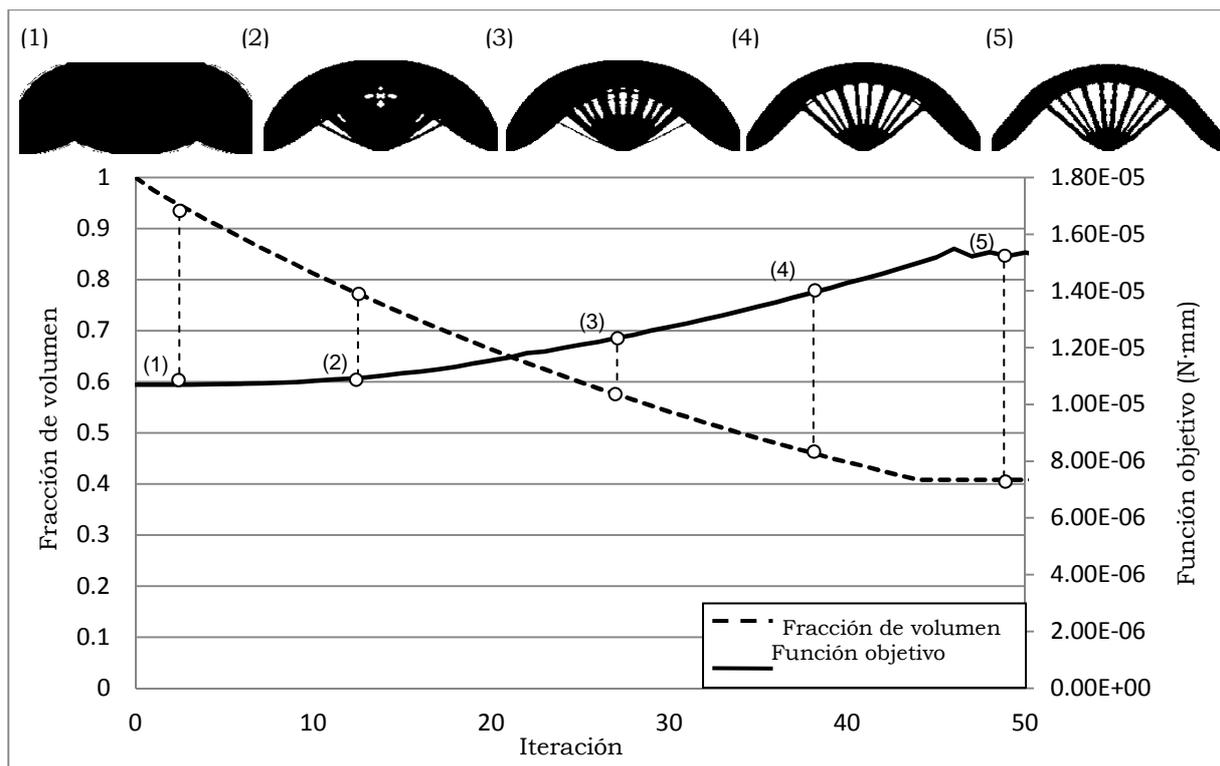


Figura 7 Proceso de optimización de un viga biapoyada de Michell

Se puede observar como la función objetivo aumenta cuando se elimina material. Es decir, si disminuye la cantidad de material del dominio de diseño, la estructura es más flexible y por lo tanto aumenta su energía de deformación. La estructura más rígida será siempre aquella que presente un dominio de diseño lleno de material y por lo tanto, la estrategia es eliminar los elementos que menos aumenten esta energía de deformación y así maximizar la rigidez de la estructura para el volumen máximo definido.

5. CONCLUSIONES

El método SERA presentado en este trabajo es un método eficiente para el diseño de estructuras de máxima rigidez. La principal diferencia respecto a otros métodos de naturaleza bidireccional que añaden y eliminan material del dominio de diseño es que los materiales ‘real’ y ‘virtual’ se tratan de forma separada. Asimismo, la separación de los criterios de eliminación y admisión de elementos resulta más eficaz y ofrece un mayor control en el proceso de optimización, además de mejorar su convergencia.

El problema de diseño se ha definido como una minimización de la energía de deformación (flexibilidad) con el objetivo de maximizar la rigidez de la estructura resultante. El empleo de un filtro de sensibilidades permite evitar problemas relacionados con el “checkerboard” y la dependencia de la malla.

La validación del método se ha presentado mediante dos problemas clásicos. Los resultados obtenidos muestran cómo el método distribuye el material de forma óptima dentro del dominio de diseño y manteniendo la restricción del volumen máximo disponible. Debido a los satisfactorios resultados obtenidos, el trabajo futuro se centra en la ampliación del método SERA a otros campos del diseño óptimo de topología.

6. REFERENCIAS

- [1] M. Bendsoe, O. Sigmund, *Topology Optimization: Theory, Method and Application*, Berlin: Springer, (2003).
- [2] X. Huang, Y. Xie, *Evolutionary topology optimization of continuum structures: Methods and applications*, Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, (2010).
- [3] M. Bensoe, N. Kikuchi, *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 71 (1988), 197-224.
- [4] M. Bendsoe, *Optimal shape design as a material distribution problem*, *Struct. Optim.* (1989), 635-654.
- [5] C. Chapman, K. Saitou, M. Jakiela, *Genetic algorithms as an approach to configuration and topology design*, *J. Mech. Des. ASME*, 116 (1994), 1005-1012.
- [6] J. Sethian, A. Wiegmann, *Structural boundary design via level set and immersed interface methods*, *J. Comput. Phys.*, 163 (2000), 489-528.
- [7] Y. Xie, G. Steven, *A simple evolutionary procedure for structural optimization*, *Comput. Struct.*, 49 (1993), 885-896.
- [8] O. Querin, G. Steven, Y. Xie, *Evolutionary structural optimization (ESO) using a bidirectional algorithm*, *Eng. Comput.*, 15 (1998), 1031-1048.
- [9] G. Rozvany, O. Querin, *Theoretical foundations of Sequential Element Rejections and Admissions (SERA) methods and their computational implementations in topology optimisation*, *Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, no. 5521, (2002).
- [10] G. Rozvany, O. Querin, *Combining ESO with rigorous optimality criteria*, *Int. J. of Vehicle Design*, 28(4) (2002), 294-299.
- [11] O. Sigmund, J. Petersson, *Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima*, *Struct. Optim.*, 16 (1998), 68-75.