

Comparativa de modelos para el cálculo experimental del factor de intensificación de tensiones empleando técnicas ópticas de campo completo

J.M. Vasco Olmo⁽¹⁾, F.A. Díaz Garrido⁽¹⁾, R. Dorado Vicente⁽¹⁾, R. López García⁽¹⁾

(1) Dpto. de Ingeniería Mecánica y Minera. Universidad de Jaén
jvasco@ujaen.es

La fotoelasticidad y la correlación digital de imágenes (DIC) son técnicas ópticas experimentales de campo completo empleadas en el análisis de elementos mecánicos. Así, la fotoelasticidad se emplea para la estimación de tensiones mientras que DIC permite medir desplazamientos y deformaciones.

En el presente trabajo se aplican las anteriores técnicas a la determinación de los factores de intensificación de tensiones (SIFs). La estimación de estos factores se ha realizado empleando tres modelos matemáticos distintos, éstos basan su cálculo en medidas del campo de tensiones (aportadas por el orden de franja en fotoelasticidad), o en el campo de desplazamientos alrededor del vértice de una grieta (DIC mide desplazamientos horizontales y verticales).

Los modelos empleados son: El modelo de Westergaard, el modelo de las series de expansión de Williams y el denominado CJP por sus autores Christopher, James y Patterson.

Mediante el empleo de los dos primeros modelos se determinan K_I , K_{II} y el T-stress (σ_{ox}), mientras que el modelo CJP considera los efectos de contacto que se establecen entre las caras de la grieta, introduciendo nuevos factores de intensificación de tensiones: K_F (factor de intensificación de tensiones análogo al K_I), K_R (factor de intensificación de tensiones de retardo) y K_S (factor de intensificación de tensiones tangenciales), además de determinar el T-stress.

Para el análisis de los factores de intensificación de tensiones se desarrollan dos interfaces (una por técnica) que permiten llevar a cabo la selección de puntos alrededor del vértice de la grieta y en el que se encuentran implementados los modelos de estudio.

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de la mecánica de la fractura [1] es proporcionar respuestas de forma cuantitativa a problemas específicos de grietas que se encuentran contenidas en elementos mecánicos o estructurales. Dentro de la mecánica de la fractura existen distintos enfoques, siendo objeto de estudio en el presente trabajo la mecánica de la fractura lineal elástica (LEFM).

Los primeros autores que aplicaron la técnica de fotoelasticidad al campo de la mecánica de la fractura fueron Post y Wells [2,3]. Sin embargo, Irwin [4] fue el primer autor que propuso una metodología para el cálculo de los factores de intensificación de tensiones (SIFs) a partir de datos isocromáticos. Posteriormente, otros han sido los autores que han desarrollado métodos alternativos para la determinación de dichos factores [5,6]. Uno de los avances más importantes en el cálculo de los SIFs fue llevado a cabo por Sanford y Dally [5] a través de su método Multi-Point Over Deterministic (MPODM), siendo los primeros en desarrollar un procedimiento general para la determinación de los SIFs en modo mixto y el T-stress. Otro avance importante en el cálculo de los SIFs fue establecido por Nurse y Patterson [7], que desarrollaron un método basado en los potenciales complejos de Muskhelishvili [8], mostrando un excelente grado de exactitud para problemas de fractura en modo mixto. Recientemente, un nuevo modelo matemático para la descripción del campo de tensiones alrededor del vértice de una grieta ha sido propuesto por Christopher et al. [9]. Este modelo, denominado CJP, es desarrollado a partir de los potenciales complejos de Muskhelishvili [8]

y tiene en cuenta los efectos de contacto que se establecen entre las caras de la grieta, introduciendo nuevos factores de intensificación de tensiones. Actualmente, muchos son los autores que están trabajando en torno a este nuevo modelo [10].

Por otro lado, hoy en día se están desarrollando técnicas de medida sin contacto basadas en correlación digital de imágenes (DIC) debido a su implementación relativamente sencilla [11]. Sutton et al. [12] desarrollaron métodos empleando los campos de deformaciones, sin embargo, como son determinados por diferenciación numérica de los campos de desplazamientos, se introduce ruido con la consiguiente aparición de errores en los resultados. Recientemente, nuevas metodologías [13,14] han sido desarrolladas para la determinación de los factores de intensificación de tensiones a partir de los campos de desplazamientos, éstas combinan la técnica de DIC con el método MPODM de Sanford y Dally [5]. Yoneyama et al. [13] desarrollaron una metodología en la que los SIFs eran determinados a partir de series de expansión trigonométricas, mientras que López-Crespo et al. [14] llevaron a cabo la determinación de los SIFs a través de una metodología basada en los potenciales complejos de Muskhelishvili [8]. Por otro lado, Yates et al. [15] determinaron los SIFs y el T-stress empleando términos de expansión de los desplazamientos según el modelo de Williams [16]. Por último, el modelo CJP desarrollado por Christopher et al. [9] para fotoelasticidad puede ser extendido para la técnica de DIC, estando menos contrastado [17].

En el presente trabajo se ha llevado a cabo una comparativa entre tres modelos distintos de definición del campo de tensiones (para la técnica de fotoelasticidad) y de los campos de desplazamientos (para el caso de DIC) en las inmediaciones del vértice de la grieta. Los modelos empleados han sido el de Westergaard [1], el modelo de Williams [6,16] y el modelo CJP [17]. Esta comparativa se ha realizado a través de la evaluación de los factores de intensificación de tensiones y el T-stress, para lo cual, se han generado artificialmente dos grupos distintos de imágenes, unas obtenidas a partir del modelo de Westergaard y otras a partir del modelo CJP, y de esta forma examinar las distintas discrepancias que puedan existir entre los tres modelos. Para agilizar el análisis de los SIFs se han desarrollado dos interfaces, una por técnica, para llevar a cabo de forma rápida su determinación.

2. DESCRIPCIÓN DE LOS MODELOS

Como se ha comentado anteriormente, en este artículo se ha llevado a cabo una comparativa entre tres modelos distintos de definición del campo de tensiones y los de desplazamientos en las inmediaciones del vértice de la grieta mediante la evaluación de los factores de intensificación de tensiones usando las técnicas ópticas de fotoelasticidad y DIC. Los modelos analizados son los siguientes:

- Modelo de Westergaard. Como su propio nombre indica, este modelo está basado en las ecuaciones clásicas de Westergaard [1].
- Modelo de Williams. Este modelo desarrolla las series de expansión de Williams [6,15].
- Modelo CJP. Nuevo modelo matemático desarrollado por Christopher, James y Patterson [17].

A continuación se va a realizar una breve descripción de los modelos para las dos técnicas empleadas.

2.1. Modelo de Westergaard

Según el modelo de Westergaard [1], el campo de tensiones y de desplazamientos (horizontales y verticales) en las proximidades del vértice de la grieta pueden ser caracterizados mediante los factores de intensificación de tensiones y las coordenadas polares de los puntos seleccionados, asumiendo como origen el vértice de la grieta:

Fotoelasticidad	DIC
-----------------	-----

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = f(K_I, K_{II}, \sigma_{0x}, r, \theta) \quad (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right\} = f(K_I, K_{II}, \sigma_{0x}, r, \theta, E, \nu) \quad (2)$$

Tabla 1. Campo de tensiones y desplazamientos según el modelo de Westergaard

En la expresión (2), E es el módulo de elasticidad del material del modelo (MPa) y ν es el coeficiente de Poisson del material.

Para la técnica de fotoelasticidad el parámetro de estudio es el orden de franja, por tanto, se ha de desarrollar una expresión que relacione el orden de franja con el campo de tensiones. Así, la ley tenso-óptica (3) relaciona el orden de franja con la diferencia de tensiones principales.

$$\frac{Nf_\sigma}{h} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + (2\tau_{xy})^2} \quad (3)$$

Donde f_σ es el valor de franja del material y h es el espesor del modelo.

Por consiguiente, sustituyendo la ecuación (1) en la expresión (3) se obtiene una ecuación no lineal (4) que relaciona el orden de franja con los factores de intensificación de tensiones, el T-stress y las coordenadas polares de los puntos seleccionados.

$$\frac{Nf_\sigma}{h} = g(K_I, K_{II}, \sigma_{0x}, r, \theta) \quad (4)$$

De esta forma, un proceso de cálculo iterativo es necesario para la determinación de los SIFs y el T-stress.

Por otro lado, para la técnica de DIC los campos de desplazamientos se obtienen de forma directa, por tanto, los factores de intensificación de tensiones y el T-stress se obtienen mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

2.2. Modelo de Williams

El segundo modelo de estudio es aquel que desarrolla las series de expansión de Williams [6,16]. Según este modelo, el campo de tensiones y de desplazamientos en las inmediaciones del vértice de la grieta se puede expresar como función de los coeficientes de las series, del número de términos y las coordenadas polares de los puntos seleccionados (expresiones recogidas en la tabla 2).

Fotoelasticidad	DIC
$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = f(n, A_{In}, A_{IIIn}, r, \theta) \quad (5)$	$\left\{ \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right\} = f(n, a_n, b_n, r, \theta, E, \nu) \quad (6)$

Tabla 2. Campo de tensiones y desplazamientos según el modelo de Williams

En la expresión (5): $A_{I1} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}$, $A_{II1} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}}$, $4A_{I2} = -\sigma_{0x}$

Mientras que en la expresión (6): $a_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}$, $b_1 = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}}$, $a_2 = \frac{\sigma_{0x}}{4}$

De igual modo que en el caso del modelo de Westergaard, al sustituir la expresión (5) en la ley tenso-óptica (3), se obtiene una ecuación no lineal (7) que relaciona el orden de franja con los coeficientes de las series y las coordenadas de los puntos seleccionados.

$$\frac{Nf_{\sigma}}{h} = g(n, A_{In}, A_{IIIn}, r, \theta) \tag{7}$$

Mediante un proceso de cálculo iterativo, los SIFs y el T-stress son determinados.

Para la técnica de DIC, sin embargo, la resolución de un sistema de ecuaciones lineales permite el cálculo de los SIFs y el T-stress.

2.3. Modelo CJP

El último modelo de estudio es el desarrollado por Christopher *et al.* [17], tratándose de un nuevo modelo matemático que está basado en los potenciales complejos de Muskhelishvili [8]. Este modelo tiene en cuenta los efectos de contacto que se establecen entre las caras de una grieta cuando se está propagando por fatiga. Así, los autores postularon que la zona plástica que se establece alrededor de la grieta ejerce un conjunto de fuerzas sobre el material elástico circundante, influyendo en el campo de tensiones y desplazamientos. Según este modelo, el estudio de las técnicas de fotoelasticidad y DIC se realiza mediante el empleo de las expresiones recogidas en la tabla 3.

Fotoelasticidad	$\frac{Nf_{\sigma}}{h} = \left Az^{-1/2} + Bz^{-3/2}\bar{z} + Cz^0 + Dz^{-1/2} \ln z + Ez^{-3/2}\bar{z} \ln z \right $	(8)
DIC	$2\mu(u + iv) = k \left[-2(B + 2E)z^{1/2} + 4Ez^{1/2} - 2Ez^{1/2} \ln z - \frac{C - F}{4} z \right]$ $-z \left[-(B + 2E)\bar{z}^{-1/2} - E\bar{z}^{-1/2} \overline{\ln z} - \frac{C - F}{4} \right] - \left(A\bar{z}^{1/2} + D\bar{z}^{1/2} \overline{\ln z} - 2D\bar{z}^{1/2} + \frac{C + F}{2} \bar{z} \right)$	(9)

Tabla 3. Expresiones de estudio según el modelo CJP para las técnicas de fotoelasticidad y DIC

Donde $z = x + iy$ es la coordenada compleja y A, B, C, D, E y F son coeficientes desconocidos que han de ser determinados.

Los autores definieron cuatro parámetros con los que el campo de tensiones y los de desplazamientos pueden ser caracterizados:

Parámetro	Descripción
$K_F = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(A - 3B - 8E)$	<i>Factor de intensificación de tensiones análogo al clásico K_I. Conductor del crecimiento de grieta, se determina evaluando σ_y.</i>
$K_R = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}}(D - 3E)$	<i>Factor de intensificación de tensiones de retardo. Caracterizado por las tensiones que actúan paralelamente a la dirección de crecimiento de grieta, determinándose por evaluación de σ_x.</i>
$K_S = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(A + B)$	<i>Factor de intensificación de tensiones tangenciales. Caracterizado por las tensiones cortantes originadas en el contorno elasto-plástico, determinándose por evaluación de τ_{xy}.</i>
$T = -C$ (fotoelasticidad) $T_x = -C$ $T_y = -F$	T -stress. En el caso de DIC se evalúa a partir de sus componentes.

Tabla 4. Parámetros de definición del modelo CJP

3. METODOLOGÍA EMPLEADA

La metodología empleada para la determinación de los factores de intensificación de tensiones y el T-stress se muestra en el siguiente diagrama

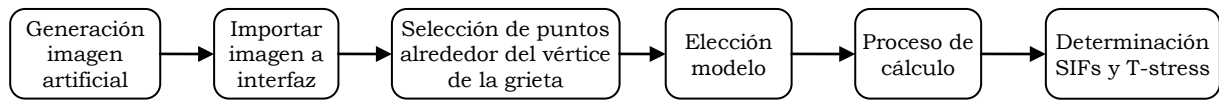


Figura 1. Metodología seguida para la determinación de los SIFs y el T-stress

El primer paso llevado a cabo en la metodología es crear la imagen artificial a partir de alguno de los modelos de estudio. Se ha optado por generar dos conjuntos de imágenes: el primero a partir de las ecuaciones de Westergaard y el segundo a partir del modelo CJP. De esta forma, se pretende comparar los valores de los SIFs a partir de los cuales las imágenes han sido definidas con los obtenidos de la implementación de los distintos modelos.

Las imágenes se han generado tratando de cubrir los casos más representativos. Así, para el modelo de Westergaard se han generado imágenes para los modos de carga I, II y mixto; mientras que para el modelo CJP se han generado imágenes en las que no se dan efectos de las tensiones de retardo o de las tensiones tangenciales y cuando sí hay presencia de unas u otras. Teniendo esto en cuenta, las características de las imágenes generadas artificialmente para ambos modelos se muestran en la tabla 5.

Imágenes a partir del modelo de Westergaard					Imágenes a partir del modelo CJP						
Im.	Modo de carga	K_I	K_{II}	σ_{0x}	Im.	Parámetros	A	B	C	D	E
1	Modo I	10	0	50	1	$K_F = 1, K_R = 0, K_S = 0, \sigma_{0x} = 1.5$	0.2	-0.2	-1.5	0	0
2	Modo II	0	5	50	2	$K_F = 1, K_R = 0.08, K_S = 0.25, \sigma_{0x} = 1.5$	0.2	-0.2	-1.5	0.005	-0.005
3	Modo mixto	10	5	50	3	$K_F = 0.88, K_R = 0, K_S = 0.38, \sigma_{0x} = 1.5$	0.35	-0.15	-1.5	0	0

Tabla 5. Imágenes generadas artificialmente a partir de los modelos de Westergaard y CJP

En la figura 2 se muestra, a modo de ejemplo, el mapa de franjas isocromático generado a partir del modelo de Westergaard correspondiente a la imagen 1.

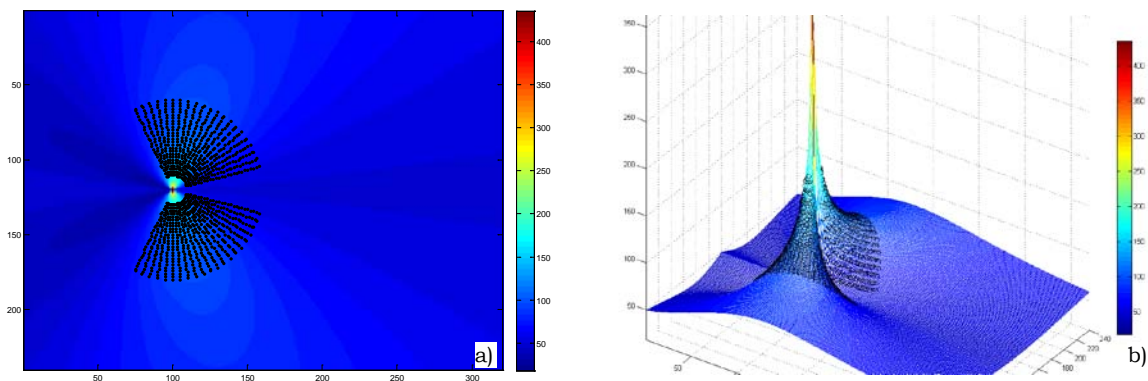


Figura 2. Mapa de franjas isocromático correspondiente a la imagen 1 generada a partir del modelo de Westergaard y selección de puntos alrededor del vértice de la grieta. a) 2D, b) 3D

Una vez generada la imagen de forma artificial, el siguiente paso en la metodología es importar dicha imagen al interfaz correspondiente. Así, si se trata de analizar el orden de franja, se empleará la interfaz creada para fotoelasticidad, mientras que si son los campos de desplazamientos los que se desean analizar, la interfaz a emplear es la correspondiente a DIC.

A continuación se procede a la selección de un conjunto de puntos en las inmediaciones del vértice de la grieta (figura 2). Para ello, el vértice de la grieta ha de ser identificado, seleccionándolo directamente sobre la imagen en estudio. El tamaño de la región en la que se encuentran los puntos seleccionados fue definido por Nurse y Patterson [7] como una

mallla anular de radio interior igual a 10 veces el radio del vértice de la grieta, y radio exterior aproximadamente igual a 0.4 la longitud de la grieta.

Una vez que se ha llevado a cabo la selección de los puntos que se van a emplear para la determinación de los SIFs, se selecciona el modelo que se desee analizar.

El último paso para la determinación de los factores de intensificación de tensiones, es el proceso de cálculo. Para el caso de la técnica de fotoelasticidad se ajusta una ecuación no lineal, empleando el método de mínimos cuadrados no lineales, rutina implementada en Matlab®. Para DIC, la determinación de los SIFs se lleva a cabo mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales combinando los dos campos de desplazamientos.

Además de la determinación de los SIFs, para evaluar la calidad de los ajustes llevados a cabo se estudian dos parámetros estadísticos, la media y la varianza.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se examinan los resultados obtenidos del análisis de las distintas imágenes generadas a partir de uno y otro modelo. En la tabla 6 se muestran los resultados, tanto para fotoelasticidad como DIC, del análisis de las tres imágenes generadas a partir del modelo de Westergaard.

Imagen 1 (modo I)		FOTOELASTICIDAD				DIC			
		Westergaard	Williams	CJP		Westergaard	Williams	CJP	
				K_F	10			K_F	10
K_I	10	10	10	K_R	$2,91 \cdot 10^{-8}$	10	10	K_R	$-5,87 \cdot 10^{-8}$
K_{II}	0	$-1,81 \cdot 10^{-15}$	$-9,92 \cdot 10^{-12}$	K_S	$3,44 \cdot 10^{-8}$	$-1,73 \cdot 10^{-16}$	$-1,37 \cdot 10^{-16}$	K_S	$-1,83 \cdot 10^{-8}$
σ_{0x}	50	50	50	σ_{0x}	-50	50	50	σ_{0x}	50
μ		$-8,25 \cdot 10^{-10}$	$-5,06 \cdot 10^{-10}$	μ	$-8,51 \cdot 10^{-11}$	$5,03 \cdot 10^{-10}$	$5,39 \cdot 10^{-10}$	μ	0,99948
S		$1,59 \cdot 10^{-16}$	$1,58 \cdot 10^{-16}$	S	$1,69 \cdot 10^{-16}$	$1,92 \cdot 10^{-16}$	$3,12 \cdot 10^{-16}$	S	$8,42 \cdot 10^{-23}$
Imagen 2 (modo II)		FOTOELASTICIDAD				DIC			
		Westergaard	Williams	CJP		Westergaard	Williams	CJP	
				K_F	0,3858			K_F	$-7,02 \cdot 10^{-9}$
K_I	0	$-2,02 \cdot 10^{-8}$	$-3,40 \cdot 10^{-8}$	K_R	0,26269	$-6,54 \cdot 10^{-10}$	$6,19 \cdot 10^{-10}$	K_R	$-3,16 \cdot 10^{-9}$
K_{II}	5	5	5	K_S	8,6354	5	5	K_S	$-2,74 \cdot 10^{-9}$
σ_{0x}	50	50	50	σ_{0x}	-17,2139	50	50	σ_{0x}	50
μ		$1,78 \cdot 10^{-9}$	$-2,11 \cdot 10^{-9}$	μ	-0,39766	$-5,49 \cdot 10^{-9}$	$-8,03 \cdot 10^{-9}$	μ	0,99948
S		$2,15 \cdot 10^{-16}$	$1,96 \cdot 10^{-16}$	S	1,4959	$5,73 \cdot 10^{-14}$	$1,05 \cdot 10^{-13}$	S	0,000235
Imagen 3 (modo mixto)		FOTOELASTICIDAD				DIC			
		Westergaard	Williams	CJP		Westergaard	Williams	CJP	
				K_F	4,7474			K_F	10
K_I	10	10	10	K_R	-0,92964	10	10	K_R	$-4,66 \cdot 10^{-8}$
K_{II}	5	5	5	K_S	7,8816	5	5	K_S	$1,68 \cdot 10^{-8}$
σ_{0x}	50	50	50	σ_{0x}	-30,3918	50	50	σ_{0x}	50
μ		$2,23 \cdot 10^{-11}$	$-9,56 \cdot 10^{-11}$	μ	-0,23624	$2,97 \cdot 10^{-10}$	$3,71 \cdot 10^{-11}$	μ	0,99959
S		$3,57 \cdot 10^{-16}$	$3,57 \cdot 10^{-16}$	S	0,89353	$1,81 \cdot 10^{-16}$	$1,94 \cdot 10^{-16}$	S	$2,20 \cdot 10^{-5}$

Tabla 6. Resultados obtenidos del análisis de las imágenes generadas a partir del modelo de Westergaard

Se observa de estos resultados como para los modelos de Westergaard y Williams, los valores obtenidos para los SIFs coinciden con los valores a partir de los cuales se han definido las distintas imágenes artificiales. Sin embargo, para el modelo CJP, se observa como los valores de los SIFs para modo II y mixto no coinciden con los de definición de la imagen. Otra observación se da para el modelo CJP usando fotoelasticidad, para el cual, el valor obtenido para el T-stress tiene signo contrario con respecto al de definición de la imagen. Para la técnica de DIC, se puede observar como cuando hay presencia de K_{II} , no existe valor de K_S como en el caso de fotoelasticidad.

En la tabla 7 se muestran los resultados obtenidos del análisis de las tres imágenes generadas a partir del modelo CJP.

Imagen 1			FOTOELASTICIDAD				DIC			
			Westergaard	Williams	CJP		Westergaard	Williams	CJP	
					K_F	1,0027			K_F	1,0027
A	0,2	K_I	1,0027	1,0027	K_R	$-2,76 \cdot 10^{-8}$	1,0027	1,0027	K_R	$-4,72 \cdot 10^{-10}$
B	-0,2	K_{II}	$4,57 \cdot 10^{-11}$	$4,57 \cdot 10^{-11}$	K_S	$2,77 \cdot 10^{-8}$	$-7,86 \cdot 10^{-18}$	$-1,49 \cdot 10^{-17}$	K_S	$-1,57 \cdot 10^{-9}$
C	-1,5	σ_{ox}	-1,5	-1,5	σ_{ox}	1,5	1,5	1,5	σ_{ox}	1,5
D	0	μ	$-2,85 \cdot 10^{-9}$	$-2,85 \cdot 10^{-9}$	μ	$1,23 \cdot 10^{-8}$	$-1,67 \cdot 10^{-10}$	$-1,49 \cdot 10^{-10}$	μ	$9,99 \cdot 10^{-1}$
E	0	S	$1,81 \cdot 10^{-16}$	$1,81 \cdot 10^{-16}$	S	$4,79 \cdot 10^{-16}$	$2,17 \cdot 10^{-16}$	$2,38 \cdot 10^{-16}$	S	$5,60 \cdot 10^{-23}$

Imagen 2			FOTOELASTICIDAD				DIC			
			Westergaard	Williams	CJP		Westergaard	Williams	CJP	
					K_F	1,0528			K_F	1,0027
A	0,2	K_I	0,83176	0,82679	K_R	0,078748	0,87492	0,87523	K_R	$-4,72 \cdot 10^{-10}$
B	-0,2	K_{II}	$3,26 \cdot 10^{-9}$	$-1,32 \cdot 10^{-9}$	K_S	$3,13 \cdot 10^{-10}$	$2,80 \cdot 10^{-18}$	$-1,50 \cdot 10^{-17}$	K_S	$-1,57 \cdot 10^{-9}$
C	-1,5	σ_{ox}	-1,4633	-1,3921	σ_{ox}	1,5	1,6263	1,7328	σ_{ox}	1,5
D	0,005	μ	0,02601	0,03322	μ	$5,21 \cdot 10^{-10}$	-0,10443	-0,08149	μ	0,99948
E	-0,005	S	0,00046	0,00327	S	$1,15 \cdot 10^{-16}$	9,5827	4,0095	S	$5,60 \cdot 10^{-23}$

Imagen 3			FOTOELASTICIDAD				DIC			
			Westergaard	Williams	CJP		Westergaard	Williams	CJP	
					K_F	1,0027			K_F	1,0027
A	0,35	K_I	1,2767	1,3213	K_R	$-1,54 \cdot 10^{-8}$	0,7927	0,8551	K_R	$8,85 \cdot 10^{-10}$
B	-0,15	K_{II}	$2,47 \cdot 10^{-6}$	$4,72 \cdot 10^{-8}$	K_S	0,25066	$-7,75 \cdot 10^{-18}$	$-9,41 \cdot 10^{-18}$	K_S	0,25066
C	-1,5	σ_{ox}	-1,65	-2,566	σ_{ox}	1,5	-0,4046	-0,22582	σ_{ox}	1,5
D	0	μ	0,034264	-0,05903	μ	$-1,79 \cdot 10^{-9}$	-0,17726	-0,23139	μ	0,99948
E	0	S	0,040211	0,11417	S	$1,65 \cdot 10^{-16}$	193,1764	206,8393	S	$4,84 \cdot 10^{-22}$

Tabla 7. Resultados obtenidos del análisis de las imágenes generadas a partir del modelo CJP

En la tabla anterior se observa como para los modelos de Westergaard y Williams no se obtienen buenos resultados cuando existe efecto de las tensiones cortantes (K_S) o de retardo (K_R). Además de esto, para fotoelasticidad se observa como los valores del T-stress obtenidos mediante los modelos de Westergaard y Williams tienen signo contrario a los obtenidos a partir del modelo CJP. Se puede observar también, para la imagen 2, como el modelo CJP mediante DIC no detecta el efecto de las tensiones de retardo, es decir, no existe valor de K_R .

5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha llevado a cabo una comparativa de modelos para la determinación de los factores de intensificación de tensiones empleando las técnicas ópticas de fotoelasticidad y DIC. La estimación de dichos factores se ha realizado empleando tres modelos matemáticos distintos de definición de los campos de tensiones (para fotoelasticidad) y desplazamientos (para DIC) en las inmediaciones del vértice de la grieta. El primer modelo está basado en las ecuaciones de Westergaard, el segundo desarrolla las series de expansión de Williams y el tercero es el nuevo modelo CJP (Christopher-James-Patterson) que tiene en cuenta los efectos de contacto que se dan entre las caras de la grieta.

La comparativa se ha realizado mediante el análisis de distintas imágenes generadas de forma artificial empleando los modelos de Westergaard y CJP. Para la evaluación de los SIFs se han desarrollado dos interfaces, una por técnica, que permiten seleccionar el conjunto de puntos alrededor del vértice de la grieta empleados para el cálculo de los SIFs. La solución se ha llevado a cabo mediante un ajuste por mínimos cuadrados (para fotoelasticidad) y mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales (para DIC).

Las conclusiones establecidas del análisis de las imágenes generadas son las siguientes:

- El modelo CJP no se ajusta bien en el caso de modos de carga II y mixtos.
- Los modelos de Westergaard y Williams no se ajustan bien cuando existe presencia de los efectos de tensiones de retardo o de tensiones cortantes entre las caras de la grieta.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha llevado a cabo con la financiación de la Junta de Andalucía a través del Proyecto de Investigación de Excelencia TEP 2009-5177, financiado con Fondos Europeos de Desarrollo Regional (FEDER).

7. REFERENCIAS

- [1]. T.L. Anderson, *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, Taylor and Francis, (2005).
- [2]. D. Post, *Photoelastic stress analysis for an edge crack in a tensile field*, Proc. SESA 12 (1) (1954), 99-116.
- [3]. A.Wells and D. Post, *Dynamic stress distribution surrounding a running crack – a photoelastic analysis*, Proc. SESA 16 (1) (1958), 69-92.
- [4]. G.R. Irwin, *Discussion of a paper: Dynamic stress distribution surrounding a running crack – a photoelastic analysis*, Proc. SESA 16 (1) (1958), 93-96.
- [5]. R.J. Sanford and J.W. Dally, *A general method for determining the mixed-mode stress intensity factors from isochromatic fringe patterns*, Engineering Fracture Mechanics 11 (1979), 621-633.
- [6]. K. Ramesh, S. Gupta and A.A. Kelkar, *Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity – revisited*, Engineering Fracture Mechanics 56 (1) (1997), 25-45.
- [7]. A.D. Nurse and E.A. Patterson, *Determination of predominantly mode II stress intensity factors from isochromatic data*, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 16 (12) (1993), 1339-1354.
- [8]. N.I. Muskhelishvili, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Noordhoff International Publishing, (1977).
- [9]. C.J. Christopher, M.N. James, E.A. Patterson and K.F. Tee, *A quantitative evaluation of fatigue crack shielding forces using photoelasticity*, Engineering Fracture Mechanics 75 (2008), 4190-4199.
- [10]. M.N. James, C.J. Christopher, Y. Lu and E.A. Patterson, *Fatigue crack growth and craze-induced crack tip shielding in polycarbonate*, Polymer 53 (2012), 1558-1570.
- [11]. T.C. Chu, W.F. Ranson, M.A. Sutton and W.H. Peters, *Applications of digital-image correlation techniques to experimental mechanics*, Experimental Mechanics 25 (3) (1985), 232-244.
- [12]. M.A. Sutton, S.R. McNeill, J.D. Helm and Y.J. Chao, *Advances in two-dimensional and three-dimensional computer vision*, Topics in Appl. Physics 77 (1999), 323-372.
- [13]. S. Yoneyama, Y. Morimoto and M. Takashi, *Automatic evaluation of mixed-mode stress intensity factors utilizing digital image correlation*, Strain 42 (2006), 21-29.
- [14]. P. López-Crespo, M. Shterenlikht, E.A. Patterson, P.J. Withers and J.R. Yates, *The stress intensity of mixed mode cracks determined by digital image correlation*, Journal of Strain Analysis 43 (8) (2008), 769-780.
- [15]. J.R. Yates, M. Zanganeh and Y.H. Tai, *Quantifying crack tip displacement fields with DIC*, Engineering Fracture Mechanics 77 (2010), 2063-2076.
- [16]. M.L. Williams, *On the stress distribution at the base of a stationary crack*, J. Appl. Mech. 24 (1957), 109-114.
- [17]. M.N. James, C.J. Christopher, Y. Lu and E.A. Patterson, *The plastic ‘inclusion’ as a meso-scale bridge between local crack plasticity and the global elastic field*, In: Int. Conf. Characterization of Crack Tip Stress Fields, Forni di Sopra, Udine, Italy, (2011).