

# Asignación óptima de valores nominales y tolerancias a un conjunto de variables dependientes no normales

Isabel González Farias<sup>(1)</sup>, Ismael Sánchez Rodríguez-Morcillo<sup>(2)</sup>

(1) Dpto. de Ingeniería Mecánica. Universidad Carlos III de Madrid  
imgfaria@ing.uc3m.es

(2) Dpto. de Estadística. Universidad Carlos III de Madrid

---

*En este trabajo se propone una metodología para la asignación óptima de las tolerancias y los valores nominales de un conjunto de variables dependientes,  $X$ , que no se ajustan al modelo normal multivariante. Los valores óptimos serán aquellos que maximicen la suma total de tolerancias. Esta metodología es una extensión de la propuesta por [1,2] para el caso de normalidad y se basa en proyectar las variables  $X$  en un conjunto de variables independientes,  $Z$ , mediante el uso de la técnica estadística Análisis de Componentes Independientes (ICA). Las variables  $Z$  pueden ser modificadas en media y varianza independientemente una de otra, y ese cambio puede ser trasladado a las variables originales  $X$ . De esta manera es posible resolver el problema de asignación de tolerancias y valores nominales sin tener en cuenta de forma explícita la dependencia de  $X$ . Para ilustrar la metodología se presenta un ejemplo que es resuelto mediante algoritmos de optimización tradicionales.*

---

## 1. INTRODUCCIÓN

La calidad de una pieza o un conjunto mecánico está definida directamente mediante un conjunto de  $M$  variables funcionales  $\mathbb{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_M)'$ , que pueden representar longitudes, volúmenes, holguras, etc. Estas variables deben cumplir ciertos requerimientos de calidad expresados como límites de especificación, es decir, se debe cumplir que  $Y_j \in [LEI_{Y_j}, LES_{Y_j}]$ , con  $j = 1, 2, \dots, M$  para que la pieza o conjunto mecánico sea considerado como no defectuoso. Sin embargo, es frecuente que estas variables  $\mathbb{Y}$  dependan de otro conjunto de  $K$  variables de diseño,  $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_K)'$ , de manera que  $\mathbb{Y} = f(\mathbb{X})$ . Estas variables  $\mathbb{X}$  son las que deben controlarse durante el proceso de fabricación y, desde el punto de vista de la calidad y del coste, resulta importante la asignación de sus valores nominales y sus tolerancias. Unas tolerancias demasiado amplias implicarían una elevada proporción de piezas defectuosas, mientras que unas tolerancias muy estrechas implicarían un coste de fabricación muy alto. Por tanto, una asignación óptima de los valores nominales y las tolerancias de  $\mathbb{X}$  puede ser planteada como aquella que maximice la suma total de tolerancias, pero que al mismo tiempo implique sólo una pequeña proporción de piezas defectuosas  $p$  (por ejemplo  $p = 0.0027$ ).

En la literatura actual podemos encontrar distintos procedimientos para la asignación de tolerancias y valores nominales de  $\mathbb{X}$ . Por ejemplo, en [3] se propone una metodología que supone unas tolerancias preespecificadas y permite asignar los valores nominales de  $\mathbb{X}$  que minimizan el porcentaje de defectuosos. En [4] se propone una metodología para asignar los valores nominales de  $\mathbb{X}$ , de manera que se maximizan un conjunto de funciones de calidad, no únicamente la proporción de no defectuosos. En el caso de asignación simultánea de valores nominales y tolerancias podemos citar, entre otros, los trabajos [5,6,7]. En estos trabajos se propone una metodología que permite minimizar el coste de calidad y fabricación, y se plantean distintos procedimientos de optimización que permiten obtener la solución del problema.

Un aspecto importante y común de todos estos procedimientos es considerar independencia entre las variables  $\mathbb{X}$ . Esta suposición puede ser incorrecta en muchos casos, ya que las

variables de diseño  $\mathbb{X}$  pueden ser dependientes como consecuencia del proceso de fabricación empleado, y el no tener en cuenta esta dependencia conlleva a una asignación no óptima de las tolerancias y los valores nominales de  $\mathbb{X}$ . Sin embargo, optimizar variables no independientes no es un problema sencillo de tratar. En [2] se propone una metodología que sí tiene en cuenta la posible dependencia de  $\mathbb{X}$ . El procedimiento que proponen los autores se basa en estimar la dependencia mediante datos obtenidos del proceso de fabricación. Los autores suponen normalidad de las variables  $\mathbb{X}$  y, por tanto, la correlación es estimada a través de la matriz de covarianzas de  $\mathbb{X}$ . El problema se plantea como un problema de optimización que busca asignar los valores nominales y las tolerancias de  $\mathbb{X}$ , de modo que se maximice la suma de tolerancias y se obtenga una pequeña proporción de defectuosos. Para poder resolver este problema, se proyecta el conjunto de variables dependientes  $\mathbb{X}$  en un conjunto de variables independientes  $\mathbb{Z}$ , las cuales son manipuladas durante el proceso de optimización. De esta forma, el problema de optimizar un conjunto de variables correladas se transforma en un problema de optimización de variables independientes que puede ser resuelto con algoritmos de optimización tradicionales.

En este trabajo, se presenta una extensión a la metodología propuesta en [1,2]. En este caso, se considerará que las variables  $\mathbb{X}$  no siguen un modelo normal multivariante, si no un modelo de probabilidad no conocido. Teniendo en cuenta este aspecto, se propone proyectar las variables  $\mathbb{X}$  en un conjunto de variables independientes  $\mathbb{Z}$ , mediante el uso de la técnica estadística Análisis de Componentes Independientes (ICA). Una vez obtenidas las variables  $\mathbb{Z}$ , el problema de asignar los valores nominales y las tolerancias óptimas de  $\mathbb{X}$  es resuelto como un problema de optimización con variables independientes.

El resto del artículo está estructurado de la siguiente manera. En la sección 2 se define el problema de asignación de tolerancias y valores nominales. En la sección 3 se presenta detalladamente la metodología propuesta. En la sección 4 se ilustra la metodología con un ejemplo. Por último se presentan las conclusiones.

## 2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Se quiere asignar el valor nominal y las tolerancias a un conjunto de  $K$  variables dependientes,  $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_K)'$  con modelo de probabilidad desconocido. Las tolerancias de  $\mathbb{X}$  serán definidas como unos intervalos alrededor del valor nominal de cada variable, es decir:

$$X_i \in [LTI_{X_i}, LTS_{X_i}] = [VN_{X_i} - TI_i, VN_{X_i} + TS_i], \quad (1)$$

donde  $TS_i$  y  $TI_i$  son las tolerancias superior e inferior de  $X_i$  y  $VN_i$  su valor nominal. Las tolerancias de  $\mathbb{X}$  dependerán directamente de la variabilidad de  $\mathbb{X}$ , pero al no asumir normalidad de  $\mathbb{X}$  su variabilidad no es estimada completamente mediante la matriz de covarianzas  $\Sigma_x$ . Los valores nominales serán las medias de las variables  $\mathbb{X}$ ,  $\mu_x$ .

La asignación de las tolerancias y los valores nominales estará sujeta a que un conjunto de  $m$  variables  $\mathbb{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ , que dependen de  $\mathbb{X}$ , cumplan unas restricciones o especificaciones, es decir que estén dentro de unos intervalos de especificación:

$$Y_j \in [LEI_{Y_j}, LES_{Y_j}], \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, M. \quad (2)$$

Estas especificaciones pueden generalizarse a especificaciones unilaterales, en cuyo caso alguno de los límites sería infinito. La relación entre  $\mathbb{Y}$  y  $\mathbb{X}$  se supone conocida e igual a

$$\mathbb{Y} = f(\mathbb{X}), \quad (3)$$

siendo  $f(\cdot)$  una relación cualquiera, lineal o no lineal.

Una pieza defectuosa se define como aquella que no cumple las especificaciones de  $\mathbb{Y}$ . Luego, la proporción de defectuosos, denotada por  $p$ , es igual a:

$$p \equiv P(\mathbb{Y} \notin S) \quad (4)$$

donde  $S$  es la región rectangular definida por las especificaciones de la pieza, es decir:

$$S = \left\{ \mathbb{Y} \in R^M : (LES_{Y_j} \leq Y_j \leq LEI_{Y_j}), j = 1, \dots, M \right\} \quad (5)$$

El problema consiste en encontrar las tolerancias óptimas  $\mathbf{t} = (TS_1, TS_2, \dots, TS_K, TI_1, TI_2, \dots, TI_K)'$  y los valores nominales óptimos  $\mathbf{VN} = (VN_1, VN_2, \dots, VN_K)'$  de cada una de las  $K$  variables  $\mathbb{X}$ . Los valores óptimos serán aquéllos que permitan maximizar la suma total de tolerancias sujeto a obtener una proporción de defectuosos  $p \leq \alpha$ , siendo habitualmente  $\alpha = 0,0027$ . La búsqueda de los valores nominales óptimos se restringirá a un intervalo definido como  $VN_i \in [(1-m)VN_i^0, (1+m)VN_i^0]$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$ , siendo  $VN_i^0$  un valor nominal inicial que puede ser el valor establecido en la etapa de diseño de la pieza, y  $m$  un valor específico, por ejemplo 0.05, 0.1, etc. Para evitar que las tolerancias tomen un valor igual o próximo a cero, se establecerán unas tolerancias mínimas  $T_{i(\min)}$ .

Resumiendo, el problema de optimización a resolver queda formulado como:

$$\begin{aligned}
 F.O: \quad & \max \left( \sum_{i=1}^K TS_i + \sum_{i=1}^K TI_i \right) \\
 \text{sujeto a} \quad & p \leq \alpha \\
 & VN_i \in [(1-m)VN_i^0, (1+m)VN_i^0], \quad i = 1, 2, \dots, K \\
 & TS_i \geq T_{i(\min)}, \quad i = 1, 2, \dots, K \\
 & TI_i \geq T_{i(\min)}, \quad i = 1, 2, \dots, K
 \end{aligned} \quad (6)$$

### 3. METODOLOGÍA PROPUESTA

La metodología propuesta se basa en los siguientes puntos:

1. Proyectar las variables dependientes  $\mathbb{X}$  en un conjunto de variables independientes  $\mathbb{Z}$ . Para ello se utilizará la técnica denominada Análisis de Componentes Independientes (ICA).
2. Modificar la media y la varianza de las variables independientes  $\mathbb{Z}$  y trasladar ese cambio a las variables originales  $\mathbb{X}$ .
3. Con los valores modificados de  $\mathbb{X}$  obtener los valores  $\mathbb{Y} = f(\mathbb{X})$  y calcular la proporción de piezas defectuosas,  $p$ .
4. Iterar, de manera que en cada iteración se obtengan nuevos valores de  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$ , hasta obtener la solución óptima que será aquella que maximice la suma total de tolerancias de  $\mathbb{X}$ .

Antes de enumerar los pasos de la metodología, se describirán detalladamente los aspectos descritos en los puntos (1) y (2).

#### 3.1 Proyección de las variables dependientes $\mathbb{X}$ en un conjunto de variables independientes $\mathbb{Z}$ mediante ICA

El método más popular para proyectar un conjunto de variables normales correladas en un conjunto de variables independientes es el denominado Análisis de Componentes Principales (PCA). Este método utiliza únicamente la información contenida en la matriz de covarianzas de las variables, ya que bajo normalidad la información de dependencia de las variables está reflejada completamente en esta matriz. ICA, sin embargo, es un método que se utiliza con el mismo objetivo, obtener variables independientes, pero se basa en información que no está contenida en la matriz de covarianzas. ICA es la herramienta adecuada para el caso de variables no normales.

Un modelo ICA considera que las variables originales pueden ser generadas por una combinación lineal de un conjunto de variables o componentes independientes. El modelo ICA puede escribirse como  $\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{Z} + \mathbf{E}$ , donde  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_K)'$  es el vector de las  $K$  variables dependientes con media cero,  $\mathbf{S}$  es la matriz de combinación de dimensión  $K \times J$ ,  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_J)'$  es el vector de las  $J$  variables independientes, con  $J < K$ , y  $\mathbf{E}$  es el vector de residuos. Este modelo ICA es muy complejo de estimar, por esta razón, la mayor parte de las aplicaciones se basan en estimar un modelo sin residuos, es decir, el modelo,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{Z}. \quad (7)$$

Teniendo en cuenta que la matriz  $\mathbf{S}$  es invertible, es posible escribir el modelo

$$\mathbf{Z} = \mathbf{W}\mathbf{X}, \quad (8)$$

siendo  $\mathbf{W} = \mathbf{S}^{-1}$  la matriz de separación. Luego, el objetivo de ICA es encontrar la matriz  $\mathbf{W}$  que permita obtener las variables  $\mathbf{Z}$  lo más independientes posible. Para la obtención de la matriz  $\mathbf{W}$  existen distintos procedimientos. Todos ellos obtienen resultados muy similares y se basan en la idea de que siendo las variables  $\mathbf{X}$  una combinación lineal de los componentes independientes  $\mathbf{Z}$  (ecuación (7)), entonces por el teorema central del límite las variables  $\mathbf{X}$  son más próximas a la normalidad que las variables  $\mathbf{Z}$ . Por tanto, estas variables  $\mathbf{Z}$  pueden ser obtenidas buscando el máximo alejamiento de la normalidad. En este trabajo se utilizará el algoritmo FastICA propuesto por [8] que se basa en la negentropía como medida de normalidad.

Si denotamos como  $\mathbf{X}^0$  la matriz de datos obtenida del proceso, de dimensión  $n \times K$ , podemos resumir los pasos del algoritmo FastICA como:

1. Obtener una matriz de datos con media 0 que será denotada como matriz  $\tilde{\mathbf{X}}$ :

$$\tilde{\mathbf{X}}^0 = \mathbf{X}^0 - \mathbf{1}\boldsymbol{\mu}_x^0, \quad (9)$$

siendo  $\mathbf{1}$  un vector de unos de dimensión  $n \times 1$ , y  $\boldsymbol{\mu}_x^0$  el vector de medias de  $\mathbf{X}^0$ .

2. Obtener una matriz de datos blanqueados, que será denotada como matriz  $\mathbf{T}$ . Esta matriz contendrá un conjunto de variables incorreladas (aunque no independientes) con media cero y varianza uno, y tendrá una dimensión reducida  $n \times J$ . La idea es reducir la dimensión de  $\mathbf{X}^0$ , de manera que el conjunto de  $J$  variables representen la mayor parte de la variabilidad total de las  $K$  variables originales. Para aplicar esta reducción de dimensión se usará PCA, de modo que  $\mathbf{T}$  puede ser calculada como:

$$\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{X}}^0 \mathbf{C}_{(J)} \mathbf{D}_{(J)}^{-1/2}, \quad (10)$$

donde  $\mathbf{C}_{(J)}$  es la matriz de los primeros  $K \times J$  autovectores de la matriz  $\mathbf{C}$ , y  $\mathbf{D}_{(J)}$  es la matriz diagonal con los primeros  $J$  autovalores de la matriz  $\mathbf{D}$ . Las matrices  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  se obtienen mediante descomposición singular (PCA) de la matriz de covarianzas de  $\mathbf{X}^0$ , es decir aplicando  $\boldsymbol{\Sigma}_x^0 = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}'$ .

3. Aplicar a las variables  $\mathbf{T}$  el modelo ICA descrito en la Ecuación (8), es decir:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{T}\mathbf{B}, \quad (11)$$

siendo  $\mathbf{B}$  la matriz de separación de dimensión  $J \times J$  que será calculada mediante el algoritmo FastICA, y  $\mathbf{Z}$  la matriz de las  $J$  variables independientes (matriz de dimensión  $n \times J$ ). Es decir, obtener en este paso la matriz de separación  $\mathbf{B}$ , y por consiguiente, la matriz de variables independientes  $\mathbf{Z}$ .

### 3.2 Modificación de la media y la varianza de las variables dependientes $\mathbf{X}$

El cambio en la media y la varianza de  $\mathbf{X}$  se obtendrá modificando la media y la varianza de las variables independientes  $\mathbf{Z}$ . Los pasos se describen a continuación:

1. Modificar la media de las variables  $\mathbf{Z}$ , obteniendo una nueva matriz  $\mathbf{Z}^I$  igual a:

$$\mathbf{Z}^I = \mathbf{Z} + \mathbf{1}\boldsymbol{\gamma}' \quad (12)$$

siendo  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_J)$  un vector de  $J$  coeficientes independientes entre sí.

2. Modificar la varianza de las variables  $\mathbf{Z}^I$ , obteniendo una nueva matriz  $\mathbf{Z}^*$  formada por los vectores  $\mathbf{Z}_i^*$  obtenidos como:

$$\mathbf{Z}_i^* = \mathbf{Z}_i^I g_i \quad i = 1, 2, \dots, J \quad (13)$$

siendo los valores  $g_i > 0$  e independientes entre sí.

3. Trasladar el cambio a las variables originales  $\mathbf{X}$  utilizando las Ecuaciones (9-11):

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{Z}^* \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}_{(J)}^{-1/2} \mathbf{C}'_{(J)} + \mathbf{1} \boldsymbol{\mu}_x^0 \quad (14)$$

### 3.3 Pasos de la metodología propuesta

Los pasos a seguir son los siguientes:

- Paso 1: Obtener del proceso de fabricación un conjunto de  $n$  datos de las  $K$  variables  $\mathbb{X}$ . Denotar esa matriz como  $\mathbf{X}^0$  y calcular su vector de medias,  $\boldsymbol{\mu}_x^0$ , y su matriz de covarianzas,  $\boldsymbol{\Sigma}_x^0$ .
- Paso 2: Obtener mediante PCA ( $\boldsymbol{\Sigma}_x^0 = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}'$ ) la matriz de autovectores  $\mathbf{C}$  y de autovalores  $\mathbf{D}$ .
- Paso 3: Obtener la matriz de descomposición  $\mathbf{B}$  mediante el algoritmo FastICA, utilizando la matriz de datos blanqueados  $\mathbf{T}$  (Ecuaciones 9 y 10).
- Paso 4: Obtener la matriz de componentes independientes  $\mathbf{Z}$ , mediante la ecuación (11).
- Paso 5: Iniciar el proceso de optimización para buscar los valores nominales y las tolerancias óptimas de  $\mathbb{X}$ . El problema de optimización a resolver es el planteado en la Ecuación (6), por tanto, es necesario definir previamente los valores  $\alpha$ ,  $m$  y  $T_{i(\min)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$ . En cada iteración  $t$  obtener una nueva matriz de valores  $\mathbf{X}_t^*$ , modificando los valores de los coeficientes  $\gamma_i$  y  $g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, J$  de las ecuaciones (12-14).
- Paso 6: Obtener la matriz de variables  $\mathbb{Y}$ , utilizando la matriz  $\mathbf{X}_t^*$  y la relación  $\mathbf{Y}_t^* = f(\mathbf{X}_t^*)$ .
- Paso 7: Calcular la proporción de defectuosos  $p$ , definida en las ecuaciones (4) y (5).
- Paso 8: Seguir iterando (pasos 5 y 6) hasta obtener la solución óptima (que maximiza la suma de tolerancias, ecuación 6). Denotar la matriz óptima como matriz  $\mathbf{X}_{opt}^*$ .
- Paso 9: Obtener los valores nominales y las tolerancias óptimas de cada variable  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$  como:

$$VN_{X_i} = E(\mathbf{X}_{opt(i)}^*)$$

$$TS_i = \max(\mathbf{X}_{opt(i)}^*) - VN_{X_i}$$

$$TI_i = VN_{X_i} - \min(\mathbf{X}_{opt(i)}^*)$$

siendo  $\mathbf{X}_{opt(i)}^*$  el  $i$ -ésimo vector de la matriz óptima  $\mathbf{X}_{opt}^*$ . Como puede deducirse de la metodología presentada, las variables a optimizar son  $2 \times J$  variables y corresponden a los coeficientes independientes  $\gamma_i$  y  $g_i$ . El algoritmo de optimización puede ser un algoritmo tradicional o cualquier algoritmo global como

los algoritmos genéticos. En este trabajo se ha utilizado el algoritmo SQP implementado en la función *fmincon* de Matlab.

#### 4. EJEMPLO

La metodología propuesta será aplicada a un conjunto mecánico formado por 2 piezas. La primera pieza está definida por 5 variables de diseño, variables  $X_1, X_2, \dots, X_5$ ; mientras que la segunda pieza está definida por 3 variables de diseño,  $X_6, X_7, X_8$ . Por tanto, el problema involucra  $K=8$  variables de diseño  $\mathbb{X}=(X_1, X_2, \dots, X_8)'$ , que supondremos como no independientes y no normales.

Los datos iniciales del proceso han sido obtenidos mediante simulación. Se han generado  $n=1000$  datos para cada variable a partir de distribuciones tipo gamma y exponencial. Se ha considerado correlación entre las variables  $X_1$  a  $X_5$  y entre las variables  $X_6$  a  $X_8$ . En la figura 1 se muestran los histogramas de las 8 variables. Como se puede ver, con el fin de ilustrar la metodología se han supuesto algunas distribuciones muy asimétricas, por lo que se obtendrán tolerancias también bastante asimétricas.

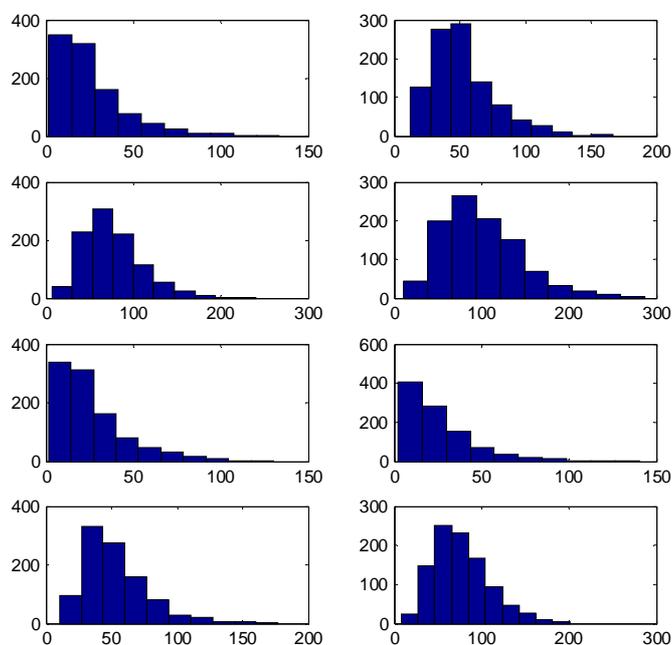


Figura 1: Histograma de las variables de diseño  $\mathbb{X}=(X_1, X_2, \dots, X_8)'$

La matriz de correlaciones obtenida a partir de los datos iniciales es igual a:

$$R_x^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0.84 & 0.62 & 0.47 & 0.98 & 0.04 & 0.04 & 0.02 \\ 0.84 & 1 & 0.51 & 0.40 & 0.84 & 0.04 & 0.03 & 0.02 \\ 0.62 & 0.51 & 1 & 0.25 & 0.63 & 0.03 & 0.04 & 0.01 \\ 0.47 & 0.40 & 0.25 & 1 & 0.47 & 0.01 & -0.01 & -0.01 \\ 0.98 & 0.84 & 0.63 & 0.47 & 1 & 0.04 & 0.04 & 0.02 \\ 0.04 & 0.04 & 0.03 & 0.01 & 0.04 & 1 & 0.84 & 0.64 \\ 0.04 & 0.03 & 0.03 & 0.01 & 0.04 & 0.84 & 1 & 0.54 \\ 0.02 & 0.03 & 0.01 & 0.01 & 0.02 & 0.64 & 0.54 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de  $\Sigma_x^0$  (que también se obtiene de los datos iniciales) se ha realizado el análisis PCA (paso 2 de la metodología), obteniéndose las matrices **C** y **D**, de autovectores y autovalores, respectivamente. La proporción de variabilidad explicada por los 5 primeros componentes principales es del 97%, por tanto, nos quedamos con  $J = 5$  variables en el espacio reducido. Es decir, se calcularán 5 componentes independientes (pasos 3 y 4 de la metodología).

Las variables funcionales del conjunto mecánica están definidas por las variables  $\mathbb{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)'$ , que pueden calcularse como:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_4 + X_5 \\ Y_2 &= X_2 - X_1 - X_8 + X_7 \\ Y_3 &= X_7 - X_6 - X_3 + X_2 \\ Y_4 &= X_4 - X_3 - X_6 \end{aligned}$$

Es decir, la relación entre  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$  puede escribirse como  $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\mathbf{A}'$ , siendo **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las especificaciones del conjunto mecánico son las siguientes:

$$\begin{aligned} Y_1 &\leq 127.13mm & Y_2 &\geq 0.0076mm \\ Y_3 &\geq 0.0254mm & Y_4 &\geq 0.0076mm \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esta información, el problema de optimización queda planteado como:

$$F.O: \max \left( \sum_{i=1}^8 TS_i + \sum_{i=1}^8 TI_i \right)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} - p &\leq 0.027 \text{ donde } p = P(\mathbb{Y} \notin S), \text{ siendo } S = \{ \mathbb{Y} \in R^4 : (LES_{Y_j} \leq Y_j \leq LEI_{Y_j}), j = 1, \dots, 4 \} \\ - VN_i &\in \left[ (1-0.05)VN_i^0, (1+0.05)VN_i^0 \right], \quad i = 1, 2, \dots, 8 \\ &\text{con } \mathbf{VN}_x^0 = (25.4, 50.8, 76.2, 101.6, 25.4, 25.3, 50.8, 76.1)' \\ - TS_i &\geq 0.01, \quad TI_i \geq 0.01, \quad i = 1, 2, \dots, 8 \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos, aplicando la metodología propuesta, se resumen a continuación:

- Matriz de descomposición **B** obtenida mediante el algoritmo FastICA:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.07 & -0.32 & -0.03 & 0.94 \\ 0.38 & 0.28 & -0.08 & 0.88 & -0.02 \\ -0.52 & -0.73 & -0.02 & 0.45 & 0.06 \\ -0.06 & -0.00 & -0.94 & -0.07 & -0.32 \\ 0.77 & -0.62 & -0.05 & -0.14 & 0.03 \end{bmatrix}$$

- Valores nominales óptimos de las variables  $\mathbb{X}$ :

$$\begin{aligned} X_1 &: 25.03mm & X_5 &: 25.07mm \\ X_2 &: 50.36mm & X_6 &: 25.65mm \\ X_3 &: 75.14mm & X_7 &: 51.30mm \\ X_4 &: 100.94mm & X_8 &: 76.01mm \end{aligned}$$

- Valores óptimos de las tolerancias superior e inferior, y valores óptimos de los límites de tolerancias de las variables  $X$  :

$TS_1 : 0.17mm$	$TI_1 : 0.03mm$	$X_1 : [25.00, 25.20]$
$TS_2 : 0.19mm$	$TI_2 : 0.03mm$	$X_2 : [50.33, 50.55]$
$TS_3 : 0.20mm$	$TI_3 : 0.06mm$	$X_3 : [75.08, 75.34]$
$TS_4 : 0.26mm$	$TI_4 : 0.10mm$	$X_4 : [100.84, 101.20]$
$TS_5 : 0.16mm$	$TI_5 : 0.03mm$	$X_5 : [25.04, 25.23]$
$TS_6 : 0.12mm$	$TI_6 : 0.03mm$	$X_6 : [25.62, 25.77]$
$TS_7 : 0.14mm$	$TI_7 : 0.03mm$	$X_7 : [51.27, 51.44]$
$TS_8 : 0.18mm$	$TI_8 : 0.07mm$	$X_8 : [75.94, 76.19]$

- Suma total de tolerancias (valor que se buscaba maximizar): 1.8mm.

## 5. CONCLUSIONES

La metodología propuesta es una metodología bastante general que puede ser aplicada a muchos problemas reales. La metodología tiene en cuenta la posible dependencia entre las variables de diseño y no asume ningún modelo de probabilidad específico de dichas variables. Su aplicación es sencilla y no necesita algoritmos de optimización complejos. Para su aplicación, es necesario disponer de un conjunto de datos del proceso de fabricación, es decir, disponer de datos del proceso de fabricación de la pieza o conjunto mecánico que se analiza.

## 6. REFERENCIAS

- [1] I. González e I. Sánchez, *Statistical tolerances synthesis with correlated variables*, Mechanism and Machine Theory, 44 (2009), 1097-1107.
- [2] I. González e I. Sánchez, *Diseño óptimo del valor nominal y las tolerancias de un conjunto de variables correladas*, Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Ciudad Real, España, (2010).
- [3] S. Director, G. Hatchel, *The simplicial approximation approach to design centering*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 7 (1977), 363-372.
- [4] G. Derringer, R. Suich, *Simultaneous optimization of several response variables*, Journal of Quality Technology, 12 (1980), 214-219.
- [5] A. Jeang, *Combined parameter and tolerance design optimization with quality and cost*, International Journal of Production Research, 39 (2001), 923-952.
- [6] A. Jeang, *Optimal Parameter and Tolerance Design with a Complete Inspection Plan*, International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 20 (2002), 121-127.
- [7] K. Sivakumar, S. Balamurugan, S., S. Ramabalan, *Simultaneous optimal selection of design and manufacturing tolerances with alternative process selection*, Computer-Aided Design, 43 (2011), 207-218.
- [8] Hyvärinen, A. and Oja, E., *Independent component analysis: algorithms and applications*, Neural Networks, 13 (2000), 411-430.