



Tratamiento de las restricciones de desigualdad en un método de optimización de síntesis cinemática

P. García Fernández, R. Sancibrián Herrera, A. de Juan de Luna, F. Viadero Rueda, A. Fernández del Rincón, M. Iglesias Santamaría

Dpto. de Ingeniería Mecánica. Universidad de Cantabria
garciafp@unican.es

En este trabajo se presentan dos alternativas para el tratamiento de restricciones de tipo desigualdad dentro de un método de síntesis cinemática óptima desarrollado por el grupo investigador. Ambas alternativas hacen uso de la técnica de las variables holgura, tratándose éstas como variables dependientes en la primera y como independientes en el segundo. Se demuestra, desde un punto teórico, que la segunda alternativa es válida únicamente cuando la restricción afecta a un parámetro de diseño constante, mientras que la primera lo es también cuando la desigualdad afecta a un parámetro que depende de la posición que ocupe el mecanismo. Unos ejemplos numéricos muestran las diferencias de aplicación de ambos planteamientos.

1. INTRODUCCIÓN

En los problemas de síntesis cinemática de mecanismos surge frecuentemente la necesidad de plantear requerimientos de diseño añadidos a los propios del problema fundamental tratado ya sea de generación de trayectoria, generación de funciones o de guiado de sólido rígido. Este tipo de restricciones, denominadas por algunos autores como adicionales [1], suelen formularse como ecuaciones de restricción de tipo desigualdad. Un caso típico de aplicación consiste en la limitación del tamaño de los elementos para asegurar la funcionalidad del mecanismo. Normalmente, dichos tamaños constituyen las variables de diseño del problema de síntesis. Nos encontramos, entonces, ante uno de los casos más simples de optimización con restricciones, en el que éstas hacen referencia a los límites de las variables de diseño. Sin embargo las restricciones de desigualdad pueden usarse para definir otros requerimientos de diseño más complejos como, por ejemplo, limitar el espacio de trabajo del mecanismo, restringir la velocidad o aceleración máxima de un elemento, etc.

El Grupo de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Cantabria ha venido trabajando en los últimos años [2, 3, 4] en el desarrollo de un método de síntesis cinemática óptima basada en el cálculo analítico del gradiente. Las restricciones de desigualdad se tratan explícitamente mediante la introducción de las denominadas variables holgura [5, 6].

La ventaja del uso de las variables holgura es que permiten tratar todas las restricciones, ya sean de igualdad o de desigualdad, de una manera uniforme. En contrapartida, además de aumentar las dimensiones del problema, la utilización de estas variables implica que las restricciones están siempre activas, y deben ser derivadas en cada iteración. Sin embargo, en el método propuesto, la determinación de las derivadas se realiza de manera analítica, con lo que solamente debe ser calculada una vez.

Por cada ecuación de desigualdad que se añada al problema, se ha de introducir una nueva variable holgura. A este respecto, se plantean dos alternativas: considerar la variable holgura como dependiente, o incluirla en el vector de variables de diseño (independiente). En este trabajo se analizan las ventajas e inconvenientes de estas dos alternativas para el tratamiento de las restricciones de desigualdad mediante unos ejemplos de aplicación.

2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL MÉTODO

Como se ha señalado anteriormente, el método de optimización propuesto para la resolución del problema de síntesis cinemática óptima está basado en la obtención analítica del gradiente. Esta característica mejora la estabilidad y velocidad de convergencia frente a otros planteamientos basados en el cálculo aproximado por diferencias finitas.

La definición del mecanismo se hace a través de una serie de coordenadas generalizadas, \mathbf{q} , que están relacionadas entre sí y con los parámetros de diseño, \mathbf{z} , a través de una serie de ecuaciones cinemáticas de restricción. $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = 0$

El problema de síntesis se plantea mediante el establecimiento de una serie de parámetros funcionales, δ , para cada posición de precisión del mecanismo. Éstos se relacionan con las coordenadas generalizadas y parámetros de diseño mediante las denominadas ecuaciones de restricción de síntesis $\mathbf{S}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \delta) = \mathbf{0}$. El error de síntesis se como la diferencia entre los parámetros funcionales generados frente a los deseados, $\varepsilon = \varepsilon(\delta_g) = (\delta_g - \delta_d)$, planteado el problema de optimización como una minimización de una función cuadrática del error de síntesis.

Minimizar:

$$FES = \frac{1}{2} \varepsilon(\delta_g(\mathbf{z}))^T \varepsilon(\delta_g(\mathbf{z}))$$

Sujeto a:

$$\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \delta_g) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \delta_g) \end{Bmatrix} = 0 \quad (1)$$

Tanto las coordenadas generalizadas como los parámetros de diseño dependen, a través de las ecuaciones de restricción, de las variables de diseño. Distinguiendo entre variables dependientes, $\mathbf{w}^T = \{\mathbf{q}^T \ \delta_g^T\}$, e independientes, \mathbf{z} , se puede plantear como un problema de minimización no restringido donde la función objetivo es denominada *función de error de síntesis*, *FES*.

Minimizar

$$FES = f(\mathbf{w}(\mathbf{z})) = \frac{1}{2} \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}))^T \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z})) \quad (2)$$

La resolución de este problema se realiza mediante el método de Newton-Gauss [6] que proporciona una dirección de búsqueda según

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k]^{-1} \mathbf{J}_k^T \varepsilon(\mathbf{w}(\mathbf{z}))_k \quad (3)$$

donde $\mathbf{J} = \nabla \varepsilon(\mathbf{z})$. El cálculo analítico de dicha matriz se hace en base a las ecuaciones de restricción y en la distinción entre coordenadas dependientes e independientes o de diseño. Para una iteración genérica k , tiene la forma.

$$\mathbf{J}_k = - \left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\mathbf{z}))}{\partial \mathbf{w}} \right] \left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{w}(\mathbf{z}), \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] \quad (4)$$

Además de las restricciones de síntesis y cinemáticas, el método es susceptible de implementar otras restricciones cinemáticas adicionales con la única condición de que sean igualmente derivables.

3. TRATAMIENTO DE ECUACIONES DE DESIGUALDAD

La resolución de problemas de optimización con ecuaciones de desigualdad se puede abordar mediante dos estrategias bien conocidas: de forma explícita mediante la

consideración de variables holgura, o de forma implícita a través de la identificación de las restricciones activas en cada iteración (*active set method*). La primera de las estrategias ha sido elegida para la incorporación de restricciones de desigualdad al método propuesto. Si bien la estrategia de las variables holgura ha sido en ocasiones minusvalorada por los inconvenientes que se le atribuyen: aumento de las dimensiones del sistema, e numéricamente inestable y puede dar lugar a singularidades, algunos autores defienden que ambas estrategias están relacionadas y se pueden combinar para el desarrollo de estrategias mejoradas [7]. Además de esta posibilidad de futuros desarrollos, las razones que justifican la selección son varias: Permite tratar todas las restricciones, ya sean de igualdad o de desigualdad, de manera uniforme sin tener que reestructurar el algoritmo base. Aunque suponen un aumento del número de variables del problema, la determinación analítica de las derivadas hace que el esfuerzo computacional no sea inaceptable y similar al que sería necesario para la identificación de las restricciones activas en cada iteración si se optase por la alternativa del *active set method*.

La formulación utilizada exige que por cada ecuación de adicional considerada se tiene que introducir una nueva variable dependiente. Asumiendo que esta ecuación adicional es de tipo desigualdad caben plantear dos alternativas: considerar la variable holgura como variable dependiente o como independiente. A continuación se exponen los detalles de implementación y consideraciones sobre cada una de dichas alternativas. Por claridad del desarrollo, y sin pérdida de generalidad, se considera una única variable dependiente q , y una sola ecuación de restricción de desigualdad del tipo

$$z_h \geq z_{h,\min} \quad (5)$$

Se transforma en igualdad mediante la variable holgura h

$$z_h - h^2 - z_{h,\min} = 0 \quad (6)$$

3.1. Consideración de variables holgura como dependientes

Por simplicidad, considérese que el problema tiene una única variable dependiente q y el error de síntesis se define a partir de la misma.

$$\varepsilon = (q - q_d) \quad (7)$$

Al existir una única ecuación de restricción, la matriz Jacobiana para una posición de precisión se puede expresar como

$$\mathbf{J}_i = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \quad (8)$$

Desarrollando dicha matriz para las funciones de error y desigualdad dadas, tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial \varepsilon}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial h} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial q} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial h} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -2h \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & -1/2h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2h} \end{bmatrix} = [\frac{1}{2} \quad 0] \\
\mathbf{J}_i &= -[\frac{1}{2} \quad 0] \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_n} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{9}$$

Se observa en este ejemplo que la matriz Jacobiana no depende de la variable holgura, haciendo que la dirección de búsqueda sea insensible a la restricción de desigualdad. Para evitar esto es necesario incluir h de algún modo dentro de la definición del error de síntesis. A tal fin se propone el término dado por la expresión siguiente

$$P(h) = \Gamma(\|h\| - h) \tag{10}$$

Este término se suma al error de síntesis convencional a modo de función de penalización, dando lugar a un error aumentado.

$$\varepsilon = (q - q_d) + \Gamma(\|h\| - h) \tag{11}$$

Si se cumple la restricción de desigualdad, el término de penalización es nulo. Sin embargo, para valores negativos de la variable holgura, es proporcional a su valor.

Con la adición de este nuevo término en el error de síntesis, se consigue que el primer término de la matriz Jacobiana dependa de h , y con el la propia matriz.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial \varepsilon}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Gamma \left(\frac{\partial \|h\|}{\partial h} - 1 \right) \end{bmatrix} \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{w}} \right]^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & \Gamma \left(\frac{\partial \|h\|}{\partial h} - 1 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\Gamma \left(\frac{\partial \|h\|}{\partial h} - 1 \right)}{2h} \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_i &= - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\Gamma \left(\frac{\partial \|h\|}{\partial h} - 1 \right)}{2h} \end{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} - \frac{\Gamma \left(\frac{\partial \|h\|}{\partial h} - 1 \right)}{2h} \right) & \dots & \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_n} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{12}$$

Debido a que el método presentado en este trabajo está basado en el cálculo analítico de la matriz Jacobiana, en la elección del término de penalización $P(h)$, se debe hacer bajo la premisa de que sea derivable.

3.2. Consideración de variables holgura como de diseño

La consideración de la nueva ecuación hace necesario la adición de una variable dependiente. Siguiendo con el ejemplo anterior, al considerar la variable holgura h en el vector de diseño es necesario promocionar z_h a variable dependiente, puesto que, por una parte, h y z_h no pueden ser simultáneamente variables de diseño, y por otra, para mantener la igualdad entre restricciones y variables dependientes.

$$\mathbf{w}^T = [q \quad z_h] \tag{13}$$

La matriz Jacobiana para una posición de precisión se calcularía según la ecuación (14), cuyos términos expandidos se muestran a continuación

$$\begin{aligned}
 J_i &= -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} \left[\frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial \mathbf{w}} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \\
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} &= [1 \quad 0] \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{w}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q} & \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \\ \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} & \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} \end{bmatrix}; \quad \left[\frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial \mathbf{w}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h}}{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} & \frac{-\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h}}{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} \\ \frac{-\frac{\partial \Phi_h}{\partial q}}{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} & \frac{\frac{\partial \Phi_i}{\partial q}}{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} \end{bmatrix} \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_{h-1}} & \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_{h+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_n} & \frac{\partial \Phi_i}{\partial h} \\ \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_{h-1}} & \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_{h+1}} & \dots & \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_n} & \frac{\partial \Phi_h}{\partial h} \end{bmatrix} \\
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} \left[\frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial \mathbf{w}} \right] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} & \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \\ \frac{\frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q}}{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} & \frac{\frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q}}{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} \end{bmatrix} \\
 J_i &= \begin{bmatrix} \frac{\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_1}}{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} + \frac{-\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_1}}{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} & \dots & \frac{\frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_i}{\partial h}}{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} + \frac{-\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial h}}{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q} \frac{\partial \Phi_h}{\partial z_h} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_h} \frac{\partial \Phi_h}{\partial q} \right)} \end{bmatrix} \quad (14)
 \end{aligned}$$

Se puede observar que la matriz Jacobiana, y por tanto también la dirección de búsqueda, está afectada por la restricción de desigualdad.

3.3. Consideraciones sobre las alternativas

Los desarrollos mostrados se basan en el ejemplo de que la inigualdad afecta a un parámetro, z_k , cuyo valor se mantiene constante durante la iteración. Sin embargo, en muchos problemas es necesario establecer restricciones de desigualdad que afecten a parámetros cuyo valor cambia en cada posición de precisión como, por ejemplo, la limitación del ángulo de presión entre dos barras. En estos casos la consideración de la variable holgura como independiente, no resulta una alternativa directamente aplicable, al existir tantos valores de la variable holgura como posiciones de precisión. Una posible forma de solventar esta deficiencia consiste en introducir el parámetro variable dentro de la función objetivo en un término que penalice el no cumplimiento de la desigualdad. Para más información véase [4].

Por su parte, la consideración de las variables holgura como dependientes presenta la desventaja de tener que seleccionar un valor adecuado para el factor de ponderación Γ de la función de penalización. Para forzar el cumplimiento de la restricción se han de tomar valores grandes de este factor (en teoría sería necesario un valor ∞). Sin embargo esto puede producir problemas numéricos y se recomienda utilizar un valor pequeño de Γ en las primeras iteraciones e ir aumentándolo geométricamente a medida que el algoritmo se aproxima a la solución óptima. La implementación de esta solución se puede hacer de forma sencilla según ecuación (11), o mediante un error de síntesis en forma de vector de dos términos, de los cuales el primero se corresponde con el error estructural y el segundo con la función de penalización. Para el ejemplo, dicho vector se escribe como

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} (\mathbf{q}) - (\mathbf{q}_d) \\ \Gamma (\|h\| - h) \end{bmatrix} \quad (15)$$

4. EJEMPLOS

A continuación se presentan dos ejemplos teóricos de síntesis cinemática que incluyen una restricción adicional de tipo desigualdad. El problema de síntesis en ambos casos consiste en la generación de una trayectoria cuasi-recta por un mecanismo de 4 barras. La restricción de desigualdad que se considera en el primer ejemplo consiste en la limitación del tamaño máximo de una barra, mientras que el segundo lo hace de la variación del ángulo de transmisión entre dos barras.

El mecanismo se define mediante 10 variables, $\mathbf{z} = \{z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 \theta_{20} \theta_1 x_0 y_0\}$. Las seis primeras constituyen las longitudes de las barras, la séptima es el ángulo de la barra motora correspondiente a la primera posición de precisión. Las tres últimas fijan la posición y orientación absolutas del mecanismo, como se muestra en la Figura 1.

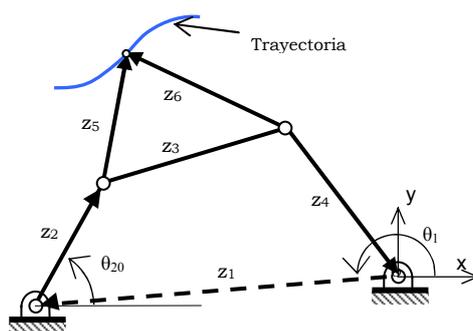


Figura 1. Variables de diseño

4.1. Limitación del tamaño máximo de la barra 2

La limitación planteada afecta directamente al valor máximo de una variable de diseño. El valor máximo admitido para z_2 es de 3 unidades de longitud. La ecuación de restricción se expresa como

$$z_2 + h^2 - 3 = 0 \tag{16}$$

Al ser z_2 constante para cualquier posición que ocupe el mecanismo se puede usar cualquiera de las alternativas propuestas. En la primera de ellas, h se considera variable dependiente e introduce el término de penalización en la definición del error de síntesis

$$\epsilon^T = [x_g - x_d \quad y_g - y_d \quad \Gamma \cdot (\|h\| - h)] \tag{17}$$

En la otra alternativa de considerar h como variable de diseño, entonces la variable z_2 debe pasar a considerarse como dependiente.

La Tabla 1 muestra los resultados para cada una de las alternativas. Asimismo se muestran los valores iniciales y los óptimos sin considerar la restricción de desigualdad.

Variables de diseño	Valores iniciales	Valores óptimos (sin inigualdad)	Valores óptimos (h dep.)	Valores óptimos (h indep.)
\mathbf{z}_1	3.16	7.16	3.78	2.84
\mathbf{z}_2	2	6.04	3	3
\mathbf{z}_3	4.47	6.6	6.28	5.1
\mathbf{z}_4	3.16	7.77	6.58	6.57
\mathbf{z}_5	2.24	10.84	16.09	12.67
\mathbf{z}_6	3	7.53	9.81	7.57
θ_{20}	0	1.46	2.35	2.04
θ_1	1.89	2.4	3.18	2.97

\mathbf{x}_o	1	4.08	4.83	4.64
\mathbf{y}_o	-2	-3.72	-4.13	-2.25
FES inicial		794.96	794.96	794.96
FES final		0.038	0.655	0.346
N° iteraciones		908	947	1038

Tabla 1. Resultados del ejemplo 1

4.2. Limitación del ángulo entre las barras 2 y 3

Como este ángulo es función de la posición del mecanismo en cada instante, el tratamiento de la correspondiente ecuación de desigualdad que surge como consecuencia de su limitación entre unos determinados valores, sólo puede hacerse con el método propuesto que considera la variable holgura como dependiente.

La restricción de desigualdad se plantea en términos del ángulo de desviación respecto de ese valor ideal $\pi/2$ rad. Se considera un valor límite para esta desviación de $\pi/6$ rad. La ecuación de desigualdad se formula

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2 + \theta_3\right) + h = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad (18)$$

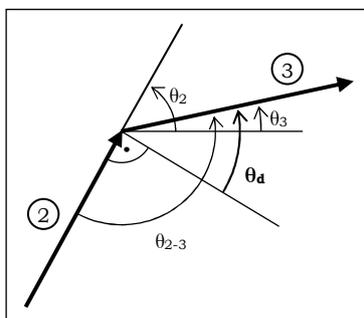


Figura 2. Ángulo de presión entre barras 2 y 3

El error de síntesis se define igualmente según la ecuación (17). Los resultados se resumen en la Tabla 2 para diferentes valores del factor de ponderación Γ .

		Factor de ponderación (Γ)				
		1	10	50	100	500
Variables de diseño	\mathbf{z}_1	7.11	4.41	7.71	7.7	7.8
	\mathbf{z}_2	4.51	2.67	5.27	5.75	5.84
	\mathbf{z}_3	9.58	10.04	12.66	12.62	12.3
	\mathbf{z}_4	12.77	11.49	8.91	8.7	8.61
	\mathbf{z}_5	15.54	16.58	6.6	6.49	6.37
	\mathbf{z}_6	5.97	6.54	8.74	8.72	8.59
	θ_{20}	1.77	1.98	1.03	1.01	0.98
	θ_1	2.72	2.88	3.12	3.17	3.17
	\mathbf{x}_o	4.49	4.84	10.1	10.11	9.99
\mathbf{y}_o	-6.43	-6.95	-0.03	0.13	0.07	
FES inicial		795	798.82	891.42	1180.81	10441.34
FES final		0.19	0.42	3.62	6.31	4.90
$\theta_{d, \max}$ inicial		-40.8	-40.8	-40.8	-40.8	-40.8
$\theta_{d, \max}$ final		-35.8	-30.1	-31.0	-30.7	30.0
N° iteraciones		99	109	51	121	40

Tabla 2. Resultados del ejemplo 2

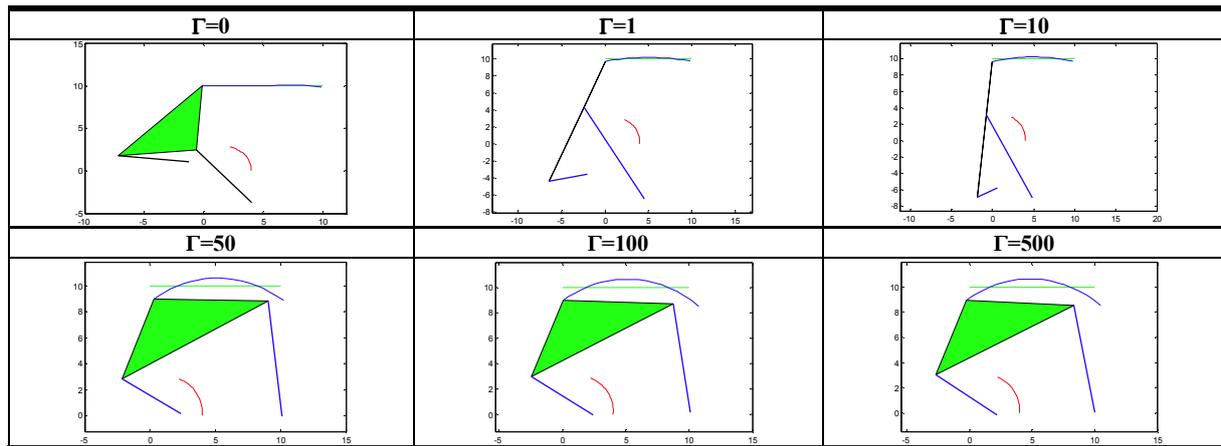


Figura 3. Mecanismos solución y trayectorias (rojo= inicial, verde= ideal y azul= óptima)

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado dos alternativas para el tratamiento de ecuaciones de restricción de tipo desigualdad dentro de un método de síntesis cinemática de desarrollo propio. Ambas alternativas están basadas en la técnica de las variables holgura.

Como se muestra en los ejemplos presentados, las dos formulaciones resultan de similar eficacia, tanto en cuanto a resultados como al esfuerzo computacional que exigen, en el caso de que las dichas restricciones afecten a un parámetro constante. En el caso de tener una restricción más compleja que afecte a parámetros que dependen de la posición del mecanismo, como es el caso del ángulo de transmisión, sólo es aplicable (de forma directa) el algoritmo que considera las variables holguras como dependientes. Para tales casos, muestra un comportamiento es igualmente satisfactorio, especialmente para valores bajos del coeficiente que pondera el término de penalización. Esto se debe a que valores altos de Γ hacen que el proceso de optimización evolucione prematuramente hacia soluciones que cumplen la desigualdad donde se atasca en mínimos locales alejados del óptimo global.

6. REFERENCIAS

- [1] J.M. Jiménez, G. Álvarez, J. Cardenal, J. Cuadrado. A simple and general method for kinematic synthesis of spatial mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 32(3), 323-341, 1997
- [2] Sancibrian, R., Garcia, P., Viadero, F., Fernandez, A., De-Juan, A. Kinematic design of double-wishbone suspension systems using a multiobjective optimisation approach. *Vehicle System Dynamics*, 48 (7), pp. 793-813. 2010.
- [3] P. García, Síntesis cinemática dimensional óptima de mecanismos mediante un método general basado en el gradiente exacto. Tesis Doctoral. Universidad de Cantabria. 2011.
- [4] A. de Juan, Metodología de síntesis óptima dimensional de mecanismos incluyendo objetivos de posición y velocidad. Tesis Doctoral. Universidad de Cantabria. 2011.
- [5] Nocedal, J. y Wright, S.J., *Numerical Optimization* 2nd edition. Springer. 2006.
- [6] Venkataraman, P. *Applied optimization with Matlab programming*. New York. John Wiley & Sons.
- [7] R. Tapia, On the role of slack variables in quasi-Newton methods for constrained optimization, North-Holland, Amsterdam, 1980, 235-246