

Validación experimental a partir de datos isocromáticos de diferentes modelos para el cálculo del factor de intensificación de tensiones en probetas planas

J.M. Vasco Olmo⁽¹⁾, F.A. Díaz Garrido⁽¹⁾, R. Dorado Vicente⁽¹⁾, A. García Collado⁽¹⁾

(1) Dpto. de Ingeniería Mecánica y Minera. Universidad de Jaén
jvasco@ujaen.es

La fotoelasticidad es una técnica óptica de campo completo de uso extendido para el estudio experimental de problemas de integridad estructural en elementos mecánicos. De particular interés resulta el uso de esta técnica para el análisis de factores de intensificación de tensiones en grietas debidas a fatiga. En este sentido, son múltiples los modelos analíticos propuestos por diferentes autores que se pueden encontrar en la literatura. Entre estos modelos caben destacar el de Westergaard, Williams, y más recientemente el desarrollado por Christopher, James y Patterson.

En el presente artículo se propone una metodología experimental basada en el análisis de datos isocromáticos con los que llevar a cabo el cálculo del factor de intensificación de tensiones durante ensayos de fatiga a distintos niveles de carga, capturando una serie de imágenes durante la realización de los mismos. La metodología desarrollada se basa en el método de las seis imágenes de Patterson y Wang para el procesamiento de los datos isocromáticos, en combinación con el Multi-Point Over-Deterministic Method (MPODM) de Sanford y Dally para el cálculo de los factores de intensificación de tensiones. La metodología propuesta se ha puesto en práctica empleando una probeta MT (Middle-Tension) fabricada en policarbonato. Con los resultados obtenidos se ha llevado a cabo un análisis comparativo de los tres modelos previamente indicados, poniendo de manifiesto diferencias entre los mismos.

1. INTRODUCCIÓN

Proporcionar respuestas de forma cuantitativa a problemas relacionados con grietas contenidas en elementos mecánicos o estructurales es un tema que ha centrado la atención de un gran número de investigadores durante mucho tiempo [1]. Dentro de estos problemas cabe destacar la evaluación del daño originado por grietas debidas a procesos de fatiga. En este contexto, un aspecto fundamental en el estudio del proceso de fatiga es cuantificar las tensiones y deformaciones en las inmediaciones del vértice de la grieta.

Desde que Post y Wells [2,3] mostraran en los años 50 el potencial de la técnica de fotoelasticidad para el estudio de problemas relacionados con la mecánica de la fractura, muchos han sido los autores que se han visto interesados en aplicar esta técnica al análisis estructural. No obstante, Irwin [4] fue el primer autor que introdujo el concepto de factor de intensificación de tensiones (SIF) y desarrolló una metodología para la evaluación del mismo a partir de datos isocromáticos. Sin embargo, para describir el campo de tensiones en las inmediaciones del vértice de la grieta con mayor exactitud debe tenerse en cuenta el T-stress [4], siendo un término de tensión no singular de campo lejano. Sanford y Dally [5] llevaron a cabo uno de los mayores avances en la determinación de los SIFs con el método Multi-Point Over-Deterministic (MPODM), siendo los primeros en proponer una metodología para el cálculo de los SIFs en modo mixto junto con el T-stress. Por su parte, Ramesh et al. [6] evaluaron los factores de intensificación de tensiones mediante el empleo de las series de expansión de Williams [7]. Otro avance importante en el cálculo de los SIFs fue establecido por Nurse y Patterson [8], que desarrollaron un método basado en los potenciales complejos de Muskhelishvili [9]. Estos potenciales complejos fueron empleados también por Pacey et al. [10] para el estudio del crecimiento de grieta a fatiga y su cierre prematuro inducido por plasticidad. Christopher et al. [11] han desarrollado recientemente un nuevo modelo

matemático para la descripción del campo de tensiones alrededor del vértice de la grieta. Este modelo se denomina CJP, basado en los potenciales complejos de Muskhelishvili [9] y que tiene en cuenta los efectos de contacto que se dan en las caras de una grieta propagándose a fatiga, introduciendo nuevos factores de intensificación de tensiones.

En el presente trabajo se propone una metodología experimental que se basa en el análisis de datos isocromáticos para la determinación de los factores de intensificación de tensiones durante ensayos a fatiga. Dicha metodología combina el método de phase-stepping de las seis imágenes de Patterson y Wang [12], empleado para el procesamiento de los datos isocromáticos, y el MPODM de Sanford y Dally [5] para el cálculo de los SIFs. De tal forma que se ha llevado a cabo un análisis comparativo entre tres modelos distintos de definición del campo de tensiones en las inmediaciones del vértice de la grieta. Dichos modelos son el de Westergaard [1], el modelo de Williams [6] y el modelo CJP [11]. Esta comparativa se ha realizado a través de la evaluación de los factores de intensificación de tensiones durante distintos ensayos a fatiga empleando una probeta MT de 2 mm de espesor fabricada en policarbonato.

2. DESCRIPCIÓN TEÓRICA DE LOS MODELOS

En este artículo se ha llevado a cabo una comparativa entre tres modelos distintos de definición del campo de tensiones en las inmediaciones del vértice de la grieta mediante la evaluación de los factores de intensificación de tensiones usando la técnica óptica de fotoelasticidad. Los modelos analizados son los siguientes:

- Modelo de Westergaard. Como su propio nombre indica, este modelo está basado en las ecuaciones clásicas de Westergaard [1].
- Modelo de Williams. Este modelo desarrolla las series de expansión de Williams [6].
- Modelo CJP. Nuevo modelo matemático desarrollado por Christopher, James y Patterson [11].

A continuación se va a realizar una breve descripción de los modelos de estudio.

2.1. Modelo de Westergaard

Según el modelo de Westergaard [1], el campo de tensiones en las proximidades del vértice de la grieta, en términos de los factores de intensificación de tensiones y de las coordenadas polares de los puntos seleccionados asumiendo como origen el vértice de la grieta, vienen dados por las siguientes expresiones (1):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\sigma_{0x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

El parámetro de estudio para la técnica de fotoelasticidad es el orden de franja, por tanto, se ha de desarrollar una expresión que relacione el orden de franja con el campo de tensiones. Así, la ley tenso-óptica (2) relaciona el orden de franja con la diferencia de tensiones principales.

$$\frac{Nf_\sigma}{h} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + (2\tau_{xy})^2} \quad (2)$$

Donde f_σ es el valor de franja del material y h es el espesor del modelo.

Por consiguiente, sustituyendo la ecuación (1) en la expresión (2) se obtiene una ecuación no lineal (3) que relaciona el orden de franja con los factores de intensificación de tensiones, el T-stress y las coordenadas polares de los puntos seleccionados.

$$\frac{Nf_{\sigma}}{h} = g(K_I, K_{II}, \sigma_{0x}, r, \theta) \quad (3)$$

De esta forma, un proceso de cálculo iterativo es necesario para la determinación de los factores de intensificación de tensiones.

2.2. Modelo de Williams

El segundo modelo de estudio desarrolla las series de expansión de Williams [6], según el cual, el campo de tensiones en las inmediaciones del vértice de la grieta es función de los coeficientes de las series, del número de términos y las coordenadas polares de los puntos seleccionados:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_{In} r^{\frac{n-2}{2}} \begin{Bmatrix} \left\{ 2 + (-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta - \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ \left\{ 2 - (-1)^n - \frac{n}{2} \right\} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ - \left\{ (-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \end{Bmatrix} \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_{II n} r^{\frac{n-2}{2}} \begin{Bmatrix} \left\{ 2 - (-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta - \left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ \left\{ 2 + (-1)^n - \frac{n}{2} \right\} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ - \left\{ (-1)^n - \frac{n}{2} \right\} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta - \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

En la expresión (4): $A_{I1} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}$, $A_{II1} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}}$, $4A_{I2} = -\sigma_{0x}$

De igual modo que en el caso del modelo de Westergaard, al sustituir la expresión (4) en la ley tenso-óptica (2), se obtiene una ecuación no lineal (5) que relaciona el orden de franja con el número de términos, los coeficientes de las series y las coordenadas de los puntos seleccionados.

$$\frac{Nf_{\sigma}}{h} = g(n, A_{In}, A_{II n}, r, \theta) \quad (5)$$

Mediante un proceso de cálculo iterativo, los factores de intensificación de tensiones son determinados.

2.3. Modelo CJP

El último modelo de estudio es el desarrollado por Christopher et al.[11], siendo un nuevo modelo matemático que se basa en los potenciales complejos de Muskhelishvili [9]. Este modelo tiene en cuenta los efectos de contacto que se establecen entre las caras de una grieta cuando se está propagando por fatiga. Estos autores postulan que la zona plástica que se establece alrededor de la grieta ejerce un conjunto de fuerzas sobre el material elástico circundante, influyendo en el campo de tensiones.

Así, empleando los potenciales complejos, la ecuación (2), correspondiente a la ley tenso-óptica, puede reescribirse como sigue

$$\frac{Nf_{\sigma}}{h} = \sigma_1 - \sigma_2 = \left| \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} \right| \quad (6)$$

Empleando la expresión anterior, el nuevo modelo matemático queda como sigue

$$\frac{Nf_{\sigma}}{h} = \left| Az^{-1/2} + Bz^{-3/2}\bar{z} + Cz^0 + Dz^{-1/2} \ln z + Ez^{-3/2}\bar{z} \ln z \right| \tag{7}$$

Los autores definieron cuatro parámetros con los que el campo de tensiones puede ser caracterizado:

- Un factor de tensiones análogo al clásico K_I , conductor del crecimiento de grieta y que es determinado mediante la evaluación de σ_y

$$K_F = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(A - 3B - 8E) \tag{8}$$

- Un factor de intensificación de tensiones de retardo, K_R , que caracteriza las tensiones que actúan de forma paralela a la dirección de crecimiento de grieta y se determina por evaluación de σ_x

$$K_R = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}}(D - 3E) \tag{9}$$

- El denominado factor de intensificación de tensiones tangenciales, K_S , que caracteriza las tensiones tangenciales en el contorno elasto-plástico y se determina por evaluación de σ_{xy}

$$K_S = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(A + B) \tag{10}$$

- El T-stress, que es añadido a σ_x como un término constante y viene dado por

$$T = - C \tag{11}$$

3. DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA EMPLEADA

La metodología empleada para la determinación de los factores de intensificación de tensiones se muestra en el siguiente diagrama

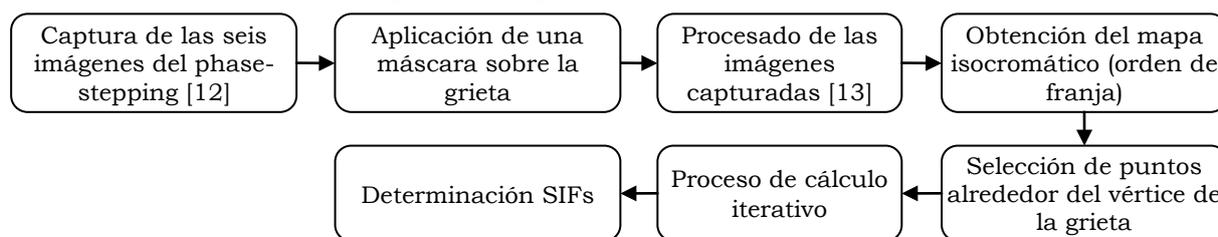


Figura 1. Metodología seguida para la determinación de los SIFS y el T-stress

El primer paso seguido en la metodología es, para los distintos niveles de carga establecidos en cada una de las longitudes de grieta analizadas, la captura de las seis imágenes correspondientes al método de phase-stepping de Patterson y Wang [12]. Para esta captura se ha empleado un polariscopio circular utilizando luz monocromática para iluminar el modelo. A continuación y como segundo paso, se ha de aplicar una máscara sobre las inmediaciones del vértice de la grieta y los flancos de la misma ya que los modelos empleados se basan en la mecánica de la fractura lineal elástica. De tal forma, que con esta máscara se elimina del análisis tanto la zona plástica existente como las regiones en las que el sistema óptico no dispone de resolución suficiente.

Una vez aplicada la máscara, se lleva a cabo el procesado de las imágenes capturadas para la obtención del mapa de franjas isocromático. El primer paso realizado en el procesado de imágenes es la obtención del mapa de isoclinas, que representan el ángulo que forman las

direcciones de las tensiones principales con respecto a una dirección fija de referencia. A partir del mapa de isoclinas se obtiene el mapa de isocromas, que representan el retardo relativo existente en los puntos del modelo. Como este mapa isocromático presenta saltos abruptos de $\pm \pi/2$ debido a la aplicación de la función inversa de la tangente, es necesario un desenvolvimiento de fase para la obtención de un mapa de retardo continuo, este proceso es conocido como unwrapping. Para este procesado se ha empleado un software elaborado por Siegmann et al. [13], que actúa procesando áreas para realizar la demodulación del mapa de isoclinas y utiliza distintos mapas de calidad para guiar el proceso de unwrapping.

Una vez obtenido el orden de franja, se procede a la selección de un conjunto de puntos alrededor del vértice de la grieta, para lo cual, la posición del mismo ha de ser identificada. El tamaño de la región en la que se encuentran los puntos seleccionados fue definido por Nurse y Patterson [8] como una malla anular de radio interno igual a 10 veces el radio del vértice de la grieta y de radio externo aproximadamente igual a 0.4 veces la longitud de la grieta. Estos puntos seleccionados son los que se emplearán para la determinación de los factores de intensificación de tensiones a través del método MPODM de Sanford y Dally [5]. Como se indicó con anterioridad, se desarrolla una ecuación no lineal, que será distinta dependiendo del modelo empleado, que relaciona el orden de franja con los factores de intensificación de tensiones y las coordenadas polares de los puntos seleccionados, asumiendo como origen el vértice de la grieta. Por último, para la resolución de la ecuación no lineal, se ha de llevar a cabo un proceso de cálculo iterativo, empleando el método de mínimos cuadrados no lineales, rutina implementada en Matlab®.

4. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Para la evaluación de los factores de intensificación de tensiones se realizaron distintos ensayos a fatiga sobre una probeta MT (Middle Tension) de 2mm de espesor, fabricada en policarbonato. Las dimensiones de la probeta empleada se observan en la figura 1

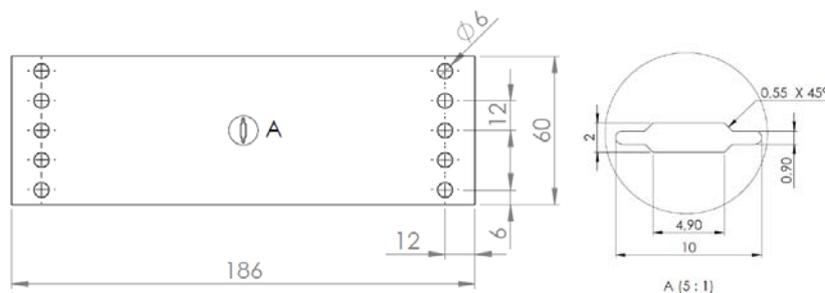


Figura 1. Dimensiones de la probeta MT empleada

Para la realización de los distintos ensayos a fatiga se empleó una máquina servohidráulica (figura 2) con capacidad de carga de 25 kN (MTS 370.02). El ciclo de carga aplicado sobre la probeta estaba comprendido entre 100 y 500 N a una frecuencia de 3 Hz. Así, durante la realización de los ensayos se capturaron imágenes a intervalos de 100 N. La figura 3 muestra dos imágenes del mapa de retardo en escala de grises correspondientes a unas longitudes de grieta de 11.03 y 18.26 mm para un nivel de carga de 500 N.

Para la realización de los ensayos, se empleó un polariscopio circular en transmisión iluminado con una fuente de luz monocromática. Las imágenes fueron capturadas mediante una cámara CCD AVT Marlin F-146 IRF controlada por un ordenador portátil Dell-Vostro 3500 Intel Core i3, a través de una tarjeta de vídeo (FWB-EC3402). Además, se empleó una lente zoom MLH-10X EO para aumentar la resolución espacial en la región cercana al vértice de la grieta (figura 2).

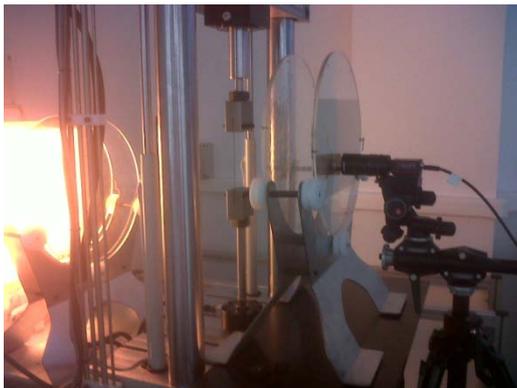


Figura 2. Equipos empleados para la realización de los ensayos

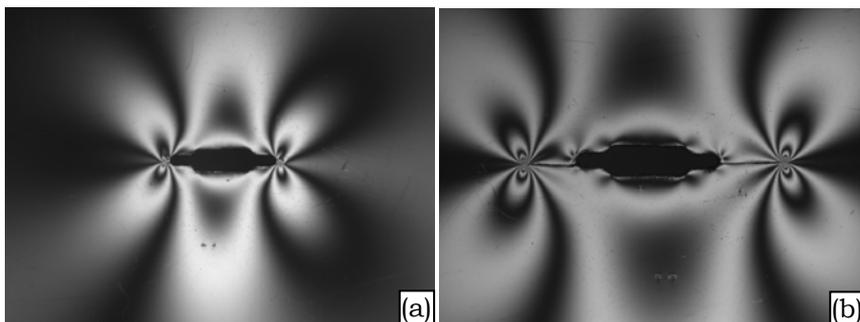


Figura 3. Mapas de retardo para 500 N: a) $2a = 11.03$ mm, b) $2a = 18.26$ mm

El cálculo de los SIFs se llevó a cabo mediante el empleo de una interfaz implementada en Matlab®. Los resultados experimentales obtenidos del análisis fueron comparados con los calculados de forma teórica [1] según la expresión siguiente

$$K_{It} = \left[1 + 0.256 \left(\frac{a}{W} \right) - 1.152 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 12.2 \left(\frac{a}{W} \right)^3 \right] \sigma \sqrt{\pi a} \quad (12)$$

Donde σ es la tensión aplicada sobre la probeta, a es la mitad de la longitud de la grieta y W es el ancho de la probeta. Por otro lado, la calidad del ajuste es evaluada mediante el empleo de dos parámetros estadísticos, la media y la varianza del ajuste realizado.

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la figura 4 se muestran los valores de los factores de intensificación de tensiones (K_I y K_{It}) obtenidos mediante el análisis de imágenes fotoelásticas empleando la metodología propuesta. Se han evaluado, para los distintos niveles de carga establecidos, cuatro longitudes de grieta: 11.03, 14.05, 16.02 y 18.26 mm. Los resultados experimentales obtenidos han sido comparados con los calculados de forma teórica.

Los resultados experimentales muestran un excelente nivel de concordancia con los calculados de forma teórica. Existe una pequeña dispersión en los resultados, siendo más importante en el caso de los obtenidos a partir del modelo de Westergaard, que puede ser atribuida a diversas razones. Una de estas razones puede ser debida al ruido presente en las imágenes capturadas. Por otro lado, errores en la localización del vértice de la grieta, ya que se realizó marcando de forma directa sobre la imagen en estudio, puede ser otra razón en la existencia de esta dispersión. No obstante, la calidad de los ajustes realizados queda avalada por valores muy pequeños del error medio normalizado (menor de $2.56 \cdot 10^{-3}$) y de la varianza (menor de $2.95 \cdot 10^{-3}$).

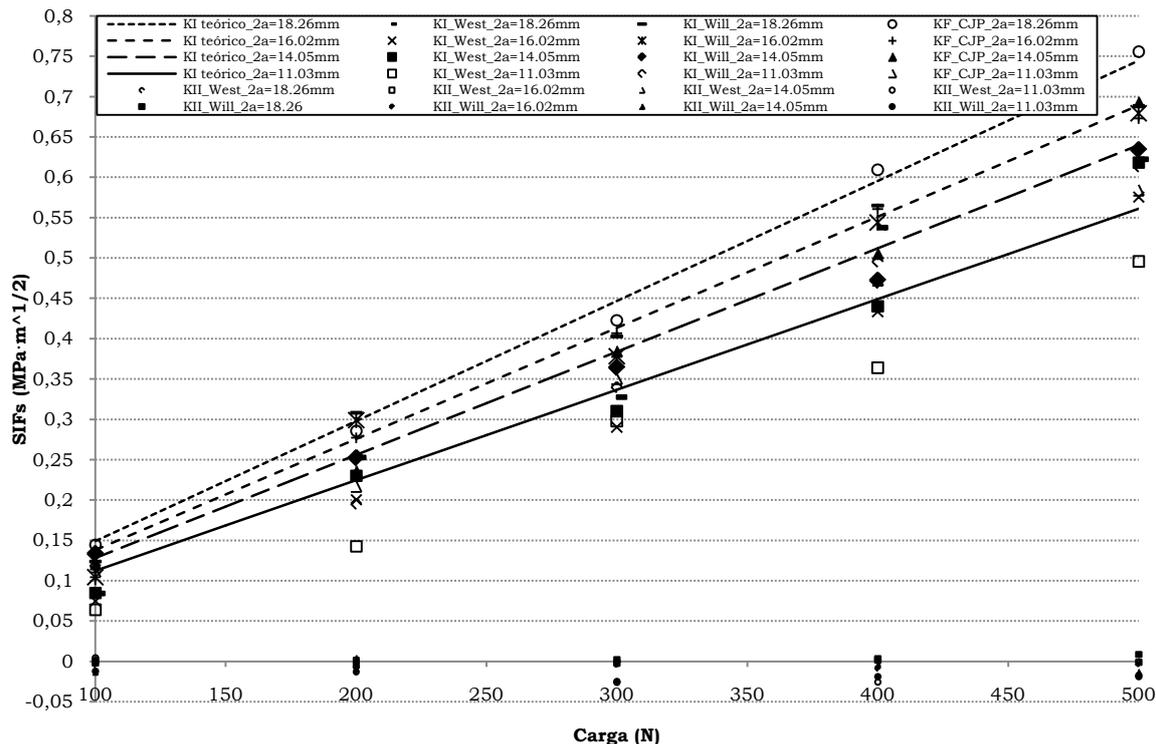


Figura 4. SIFs obtenidos mediante los tres modelos para distintas longitudes de grieta

En la figura 5 se muestran los valores obtenidos para los dos nuevos factores de intensificación de tensiones K_R y K_S definidos en el modelo CJP. Los resultados son consistentes para los niveles de carga establecidos en cada una de las longitudes de grieta analizadas. Se observa un aumento progresivo de K_R con la carga, no existiendo notables diferencias en su valor entre las distintas longitudes de grieta. Analizando los valores de K_S , se observa un descenso progresivo con la carga, existiendo para los valores de 100, 200 y 300 N diferencias importantes en su valor entre las distintas longitudes de grieta.

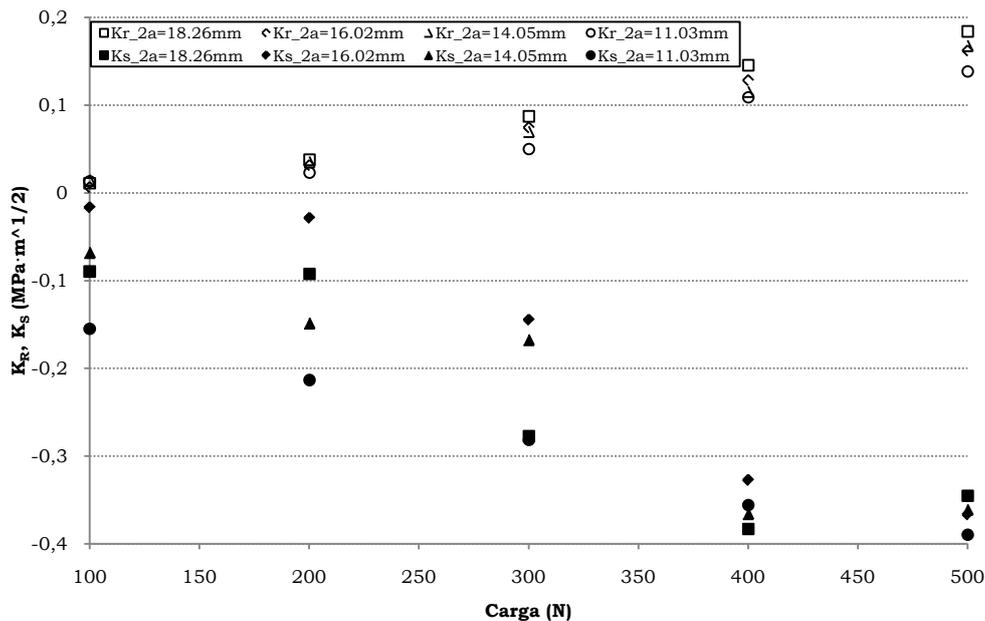


Figura 5. K_R y K_S obtenidos para las longitudes de grieta analizadas

6. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha llevado a cabo la validación de distintos modelos de definición del campo de tensiones en las inmediaciones del vértice de la grieta empleando la técnica óptica de fotoelasticidad a través de la evaluación de los factores de intensificación de tensiones. El primer modelo está basado en las ecuaciones clásicas de Westergaard, el segundo desarrolla las series de expansión de Williams, mientras que el tercero es el nuevo modelo CJP (Christopher-James-Patterson) que tiene en cuenta los efectos de contacto que se dan en las caras de la grieta.

Se ha propuesto una metodología experimental que se basa en el análisis de datos isocromáticos con los que determinar los factores de intensificación de tensiones. Dicha metodología desarrollada combina el método de phase-stepping de las seis imágenes de Patterson y Wang con el Multi-Point Over-Deterministic Method de Sanford y Dally. La puesta en práctica de la metodología se ha llevado a cabo a través de distintos ensayos a fatiga aplicados sobre una probeta MT fabricada en policarbonato. Así, los resultados experimentales obtenidos muestran un gran nivel de concordancia con los teóricos, por lo que se pone de manifiesto el gran potencial que presenta la técnica de fotoelasticidad en problemas relacionados con la mecánica de la fractura.

7. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha llevado a cabo con la financiación de la Junta de Andalucía a través del Proyecto de Investigación de Excelencia TEP 2009-5177, financiado con Fondos Europeos de Desarrollo Regional (FEDER).

8. REFERENCIAS

- [1]. T.L. Anderson, *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, Taylor and Francis, (2005).
- [2]. D. Post, *Photoelastic stress analysis for an edge crack in a tensile field*, Proc. SESA 12 (1) (1954), 99-116.
- [3]. A.Wells and D. Post, *Dynamic stress distribution surrounding a running crack – a photoelastic analysis*, Proc. SESA 16 (1) (1958), 69-92.
- [4]. G.R. Irwin, *Discussion of a paper: Dynamic stress distribution surrounding a running crack – a photoelastic analysis*, Proc. SESA 16 (1) (1958), 93-96.
- [5]. R.J. Sanford and J.W. Dally, *A general method for determining the mixed-mode stress intensity factors from isochromatic fringe patterns*, Engineering Fracture Mechanics 11 (1979), 621-633.
- [6]. K. Ramesh, S. Gupta and A.A. Kelkar, *Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity – revisited*, Engineering Fracture Mechanics 56 (1) (1997), 25-45.
- [7]. M.L. Williams, *On the stress distribution at the base of a stationary crack*, J. Appl. Mech. 24 (1957), 109-114.
- [8]. A.D. Nurse and E.A. Patterson, *Determination of predominantly mode II stress intensity factors from isochromatic data*, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 16 (12) (1993), 1339-1354.
- [9]. N.I. Muskhelishvili, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Noordhoff International Publishing, (1977).
- [10]. M.N. Pacey, M.N. James and E.A. Patterson, *A New Photoelastic Model for Studying Fatigue Crack Closure*, Society for Experimental Mechanics 45 (1) (2005), 42-52.
- [11]. C.J. Christopher, M.N. James, E.A. Patterson and K.F. Tee, *A quantitative evaluation of fatigue crack shielding forces using photoelasticity*, Engineering Fracture Mechanics 75 (2008), 4190-4199.

- [12]. E.A. Patterson and Z.F. Wang, *Towards full-field automated photoelastic analysis of complex components*, Strain 27 (1991), 49-56.
- [13]. P. Siegmann, D. Backman and E.A. Patterson, *A robust approach to demodulating and unwrapping phase-stepped photoelastic data*, Society for Experimental Mechanics 45 (3) (2005), 278-289.