

## Tiempo de corte estimado en operaciones de vaciado

R. Dorado<sup>(1)</sup>, P. Romero Carrillo<sup>(1)</sup>, E. López Alba<sup>(1)</sup>, R. López García<sup>(1)</sup>

(1) Dpto. de Ingeniería Mecánica y Minera. Universidad de Jaén  
[rdorado@ujaen.es](mailto:rdorado@ujaen.es)

El vaciado de material en una región plana mediante fresado tiene una gran aplicación en la fabricación de componentes mecánicos. La eficiencia de las trayectorias de vaciado se mide mediante el tiempo de corte, el cual suele estimarse teóricamente suponiendo una velocidad de avance constante. Esta estimación no considera la aceleración-deceleración de la fresa, que resulta relevante si la trayectoria se compone de muchos tramos rectos de pequeña longitud o en el caso de mecanizados a alta velocidad. Este trabajo presenta un modelo geométrico que simula la dinámica de la fresa para proporcionar el tiempo de corte de una operación de vaciado plano. La idea es definir, a partir de la curvatura de la trayectoria  $k(s)$  (de la que depende la aceleración), la velocidad de avance  $v(k(s))$ , y a partir de esta calcular el tiempo de corte. A diferencia de otras técnicas el método propuesto es fácil de implementar y es aplicable a cualquier curva plana. Los ensayos realizados demuestran una buena correspondencia entre tiempos reales y simulados.

### 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los procesos de mecanizado más comunes en aplicaciones industriales es la eliminación de material mediante fresado. Estas operaciones de vaciado (Figura 1) permiten aligerar componentes mecánicos y pueden automatizarse fácilmente en máquinas de  $2\frac{1}{2}$  D ya que en la mayoría de las ocasiones se reducen a practicar huecos con fondo plano. Hatna, Grieve y Broomhead [1] muestran una revisión detallada de las técnicas clásicas de vaciado.

En términos de productividad, la eficiencia de un vaciado depende del tiempo de corte empleado [2]. Pueden implementarse distintas estrategias (trayectoria y parámetros de corte) para obtener un mismo vaciado, por ello si se desea mejorar la productividad es necesario conocer el tiempo de mecanizado de las distintas soluciones.

El anterior tiempo suele calcularse teóricamente suponiendo una velocidad de avance constante, y multiplicando su inversa por la longitud total de la trayectoria. Sin embargo, esta estimación no considera los efectos de la aceleración y deceleración de la fresa, que pueden incrementar su valor cuando la trayectoria se compone de muchos tramos rectos de pequeña longitud o en el caso de mecanizados a alta velocidad [3], [4]. En ambos casos se producirán deceleraciones/aceleraciones para mantener la estabilidad de la operación [5].

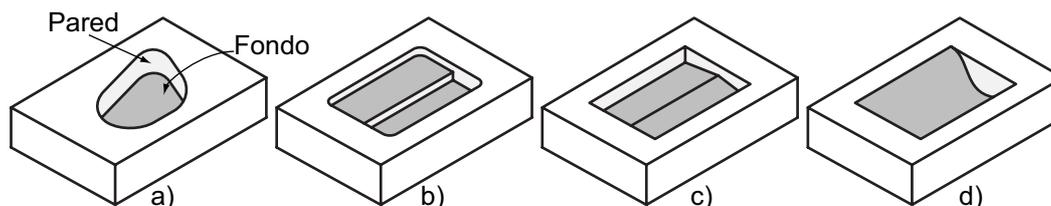


Figura 1. Tipos de vaciado: a) plano, con fondo y paredes planas, b) multientrada, con varios fondos planos, c) multicara, con fondos de distinta inclinación, d) fondo libre, el fondo es una superficie arbitraria

Por todo lo anterior, resulta interesante disponer de una estimación más realista del tiempo de corte, que permita comparar estrategias de vaciado sin necesidad de realizar ensayos reales. Como indican Monreal y Rodríguez [6], es posible abordar este problema mediante:

- Estimación analítica. Se trata de simular el comportamiento físico del sistema, por esta razón este enfoque es complejo y requiere de la identificación de diferentes parámetros.
- Estimación empírica. Consiste en ajustar un modelo a datos empíricos, en consecuencia se necesita un gran número de ensayos para garantizar un resultado adecuado.
- Estimación mecánica. Combinando ambas estrategias se puede emular el comportamiento del sistema una vez calibrados un número limitado de parámetros.

Dentro de las técnicas de estimación mecánica pueden destacarse el método de Bieterman y Sandstrom [7] que plantea el problema como un proceso de optimización a resolver numéricamente. Sin el coste computacional de la anterior, pero únicamente aplicables a polilíneas destacan la técnica heurística definida por Kim et al. [4] difícil de reproducir, y la basada en la detección y valoración de cambios de dirección en la trayectoria que Monreal y Rodríguez [6] aplican a la comparación de vaciados en zig-zag.

En el presente trabajo se plantea una estimación mecánica del tiempo de corte en operaciones de vaciado plano (las más comunes, Figura 1.a). Si  $s$  es el parámetro longitud de arco, y  $\mathbf{c}(s)$  la trayectoria de vaciado, la idea es definir, a partir de la curvatura de la trayectoria  $k(s)$  (de la que depende la aceleración [5]), la velocidad de avance  $v(k(s))$ . Integrando la inversa de la velocidad en toda la longitud de la trayectoria se obtiene el tiempo de corte  $t$ .

El método propuesto es toma ideas de la técnica de Monreal y Rodríguez [6], pero se diferencia significativamente de esta en:

- La detección de los cambios de dirección. Se evalúa la curvatura de la trayectoria, no el ángulo de los vértices de las trayectorias.
- La posibilidad de aplicar el método a cualquier trayectoria plana, no sólo en zig-zag. De manera que la técnica permite comparar trayectorias de vaciado de distinta naturaleza: zig-zag, contour parallel, espiral.
- La estimación de la aceleración de la herramienta. Que resulta menos costosa.

Para su validación, la técnica se ha aplicado a la estimación del tiempo de corte en el vaciado plano de una región convexa [8] (esto último evita retracciones de la herramienta). Se han probado tres tipos de trayectorias con las mismas condiciones de velocidad de avance media, diámetro de la herramienta y profundidad de pasada. Los resultados demuestran una mayor correspondencia con los tiempos reales que la estimación teórica.

Se ha organizado el trabajo en 4 Secciones además de la introducción. La Sección 2 describe brevemente la relación curvatura-avance en la que se basa el modelo geométrico de estimación del tiempo de corte. El anterior modelo se explica en la Sección 3. Los resultados de los distintos ensayos de validación se muestran en la Sección 4. Mientras que las principales conclusiones se resumen en la Sección 5.

## 2. CURVATURA Y VELOCIDAD DE AVANCE

El procedimiento de estimación que se propone se basa en establecer una relación entre la curvatura de la trayectoria de vaciado y la velocidad de avance. Tal y como indican Wang, Jang y Stori [5], la aceleración y la sobreaceleración (jerk) están relacionadas con la curvatura, en concreto la aceleración es proporcional a la curvatura.

Suponiendo que la herramienta sigue a velocidad constante una trayectoria libre de vaciado  $\mathbf{c}(t)$  con  $t$  el tiempo, entonces la aceleración  $\mathbf{a}(t)$  será distinta de cero en la dirección normal a la curva  $\mathbf{n}(t)$ , cuando la velocidad  $\mathbf{v}(t)=v(t)\mathbf{t}(t)$  (con  $\mathbf{t}$  vector tangente unitario de  $\mathbf{c}(t)$ ) cambie de dirección.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv(t)\mathbf{t}(t)}{dt} = \underbrace{\frac{dv(t)}{dt}}_{a_t(t)\mathbf{t}(t)} \mathbf{t}(t) + v(t) \underbrace{\frac{d\mathbf{t}(t)}{dt}}_{a_n(t)\mathbf{n}(t)}. \quad (1)$$

Esto implica que para modelar la dinámica de la herramienta es necesario determinar las posiciones de cambio de dirección de la velocidad. Como explican los textos de geometría diferencial [9], [10], el módulo de la variación de la dirección de la velocidad está relacionado con la curvatura  $k$ :

$$k(t) = \frac{1}{v(t)} \left| \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} \right|. \quad (2)$$

Combinando esta ecuación (2) con la (1) se deduce para cada posición  $t$  que:

$$a_n = v^2 k, \quad (3)$$

por lo que despejando, la velocidad en la curva puede modelarse en cada posición de la trayectoria como:

$$v = \sqrt{\frac{a_n}{k}}. \quad (4)$$

Suponiendo que la fresadora no superará una determinada velocidad de consigna  $v_c$ , la velocidad de avance podrá estimarse así:

$$v = \begin{cases} v_c, & \text{Si } v_c < \sqrt{\frac{a_n}{k}}, \text{ o } k = 0 \\ \sqrt{\frac{a_n}{k}}, & \text{En el resto de los casos} \end{cases}. \quad (5)$$

La relación (5) es la que se estaba buscando. Obsérvese que los cambios en la dirección de la velocidad se traducen en cambios en el valor de la curvatura, por tanto (5) es sensible a la dinámica de la herramienta.

A priori es imposible conocer la expresión paramétrica  $\mathbf{c}(t)$ , sin embargo puede obtenerse la trayectoria  $\mathbf{c}(s)$  respecto a un parámetro arbitrario  $s$ : basta con interpolar las distintas posiciones con la continuidad deseada [11]. Pese al cambio de parámetro las condiciones (2-5) se siguen manteniendo.

Una vez conocida  $\mathbf{c}(s)$  basta con determinar su curvatura  $k$ , definir  $v_c$ , y calibrar el parámetro  $a_n$  (aceleración de la herramienta) en (4) para tener una estimación de  $v$ . La determinación de  $a_n$  y  $v_c$  se describen en la siguiente Sección 3, por otro lado la curvatura puede determinarse como indica Patrikalakis [9]:

$$k(s) = \frac{(\mathbf{c}'(s) \times \mathbf{c}''(s)) \cdot \mathbf{n}(s)}{|\mathbf{c}'(s)|^3}. \quad (6)$$

Puede verse que la ecuación (6) es aplicable a cualquier curva plana, sin embargo está claro también que si la trayectoria es una polilínea (tramos rectos, Figura 2) su valor es siempre cero, por lo que no permitiría la detección de los cambios buscados en la dirección de la derivada.

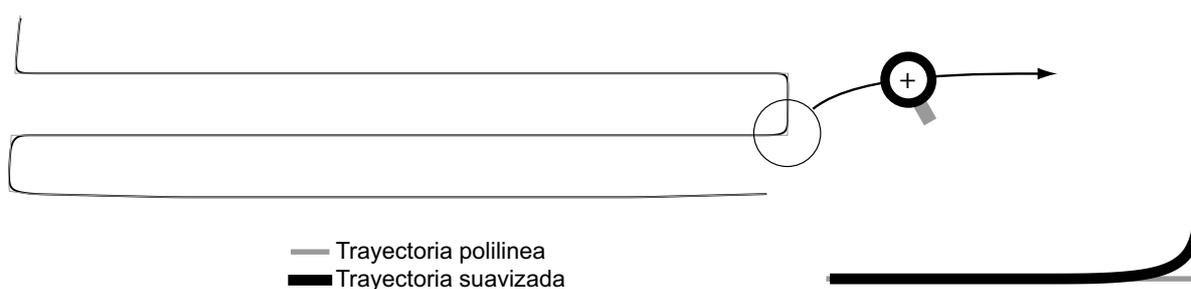


Figura 2. Ejemplo de suavizado de los vértices de una polilínea.

Para resolver el anterior problema la idea es conseguir una trayectoria con segunda derivada no nula en los tramos de interés. Esto se ha logrado en este trabajo definiendo la trayectoria como una curva de B-spline de continuidad  $C^2$  y con puntos de control una colección de posiciones sobre la trayectoria. El efecto de esta definición, como señala Sánchez-Reyes [12], es el de un filtro que “suaviza” los vértices de la polilínea (Ejemplo en la Figura 2).

La anterior solución es por tanto más fácil de implementar y no requiere la estimación de un parámetro adicional como la propuesta por Monreal y Rodríguez [6], que consiste en empalmar los tramos rectos con arcos de circunferencia de radio dependiente del ángulo formado entre los tramos.

En resumen una vez conocida la trayectoria de vaciado se filtra-suaviza, se aplica la Ecuación (6) para determinar la curvatura, y finalmente se estima la velocidad empleando la relación (5).

### 3. MODELO DE TIEMPO DE CORTE

Conocida la velocidad de avance  $v$  (5) en cada posición  $s$  de la trayectoria, el tiempo de corte se puede obtener integrando la inversa de  $v$  a lo largo del parámetro  $s$  de la curva. Si además el parámetro  $s$  es el parámetro longitud de arco, y  $L$  es la longitud total de la trayectoria, entonces de nuevo de la geometría diferencial se deduce que:

$$t = \int_0^L \frac{1}{v(s)} ds. \quad (7)$$

La anterior ecuación (7) junto con las relaciones (5) y (6) para la determinación de la velocidad de avance y de la curvatura respectivamente, definen el modelo de tiempo de corte propuesto.

Para poder emplear la expresión (7) es necesario resolver los siguientes problemas:

1. Es necesario parametrizar la trayectoria en el parámetro longitud de arco. En los ejemplos se ha aproximado el parámetro arco mediante el parámetro chord length tal y como explica Farin [11].
2. Debe definirse la velocidad de consigna  $v_c$ . Teniendo en cuenta la relación t-v mostrada en la Figura 3 para un tramo recto, para recorrer el mismo espacio  $L$  en el mismo tiempo la  $v_c$  a emplear en (7) debe ser mayor a la velocidad indicada en el control  $f$ . En los ejemplos de la Sección 4 se ha tomado  $v_c = 1.15 f$ , esta asignación es la que mejores resultados ofrecía.
3. Por último se debe determinar el parámetro  $a_n$  (4). Esta aceleración se ha aproximado midiendo la velocidad media  $v_m$  en un tramo recto de longitud conocida  $l$ :

$$a_n = \frac{v_m^2}{l}. \quad (8)$$

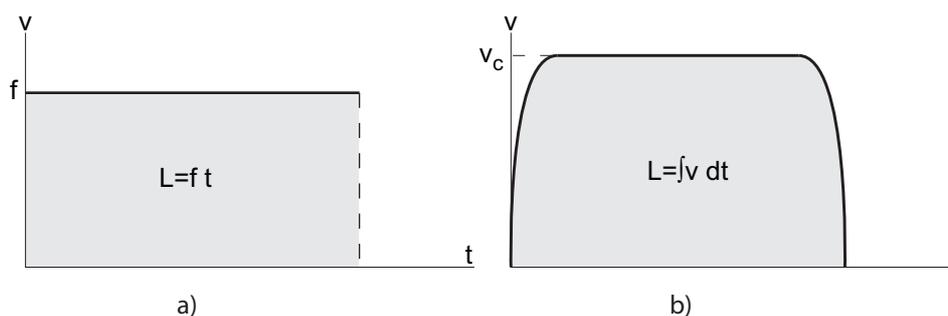


Figura 3. Modelos de velocidad para un tramo recto de longitud  $l$  conocida:  
a) velocidad uniforme, b) modelo propuesto.

#### 4. ENSAYOS DE VALIDACIÓN

Para validar el modelo descrito en las Secciones 2 y 3, se han medido los tiempos de corte en el vaciado de una región convexa, y empleando tres trayectorias diferentes: zig-zag, countour parallel y espiral.

Las trayectorias zig-zag y contour parallel se han generado utilizando el sistema CAM de Catia, mientras que la trayectoria en espiral se ha generado mediante morphing de la frontera en el software de computación científica Mathematica. El código G de todas las trayectorias se obtuvo mediante CATIA. La máquina CNC empleada para el fresado es una ALECOP-ODISEA de 3 ejes (Figura 4), y los parámetros de corte elegidos se muestran en la Tabla 1.

Atendiendo a los parámetros de corte (Tabla 1), y a la medida de la velocidad media en un tramo recto para determinar  $a_n$ , se han definido los parámetros del modelo de tiempo de corte (Ecuación, 8) como  $v_c=125$  mm/min y  $a_n=0.08$  mm/s<sup>2</sup>.

La Figura 5 muestra la trayectoria de vaciado así como la velocidad y el tiempo estimados en función de la longitud recorrida por la herramienta. Puede observarse como en los tramos rectos el modelo permite a la herramienta desplazarse a la velocidad constante  $v_c$  mientras que en aquellos tramos donde se produce un cambio de dirección (zonas de mayor curvatura) se reduce la velocidad.

Velocidad avance (mm/min)	Profundidad vaciado (mm)	Diámetro Hta (mm)
100	2	6

Tabla 1. Parámetros de corte

Trayectoria	Longitud (mm)	Tiempo corte real (s)	Velocidad uniforme		Modelo tiempo de corte (Ecuación, 7)	
			Tiempo teórico (s)	Error relativo (%)	$t$ (s)	Error relativo (%)
Zig-zag	686	432	403	7	433.4 423	0.3 2
Contour	670	429	394	8	428.5	0.1
Spiral	925	607	544	10	634	4

Tabla 2. Resultados tiempos de corte



Figura 4. Equipo empleado en los ensayos.

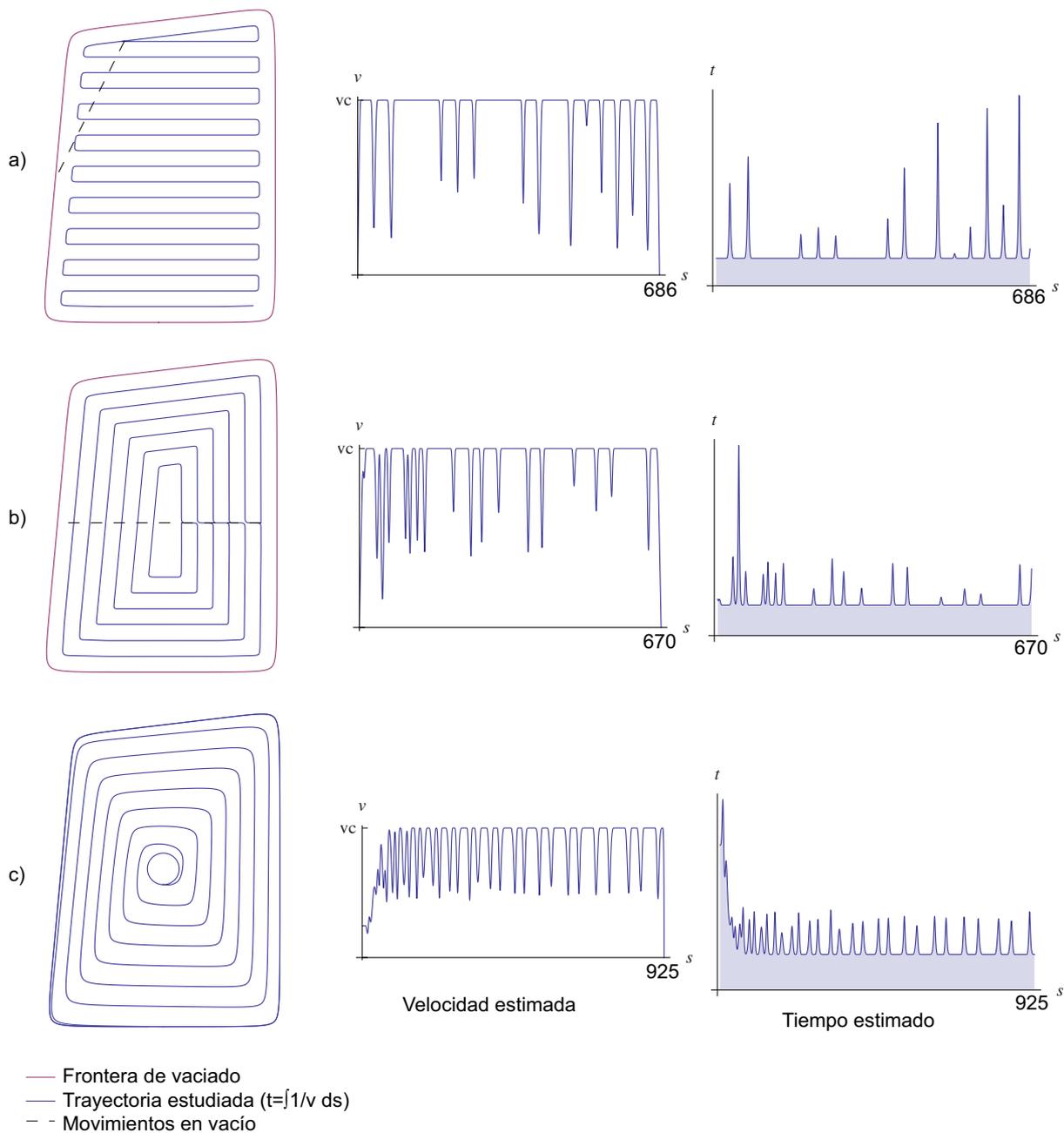


Figura 5. Resultados de la simulación con el modelo propuesto: a) trayectoria zig-zag, b) trayectoria contour parallel, c) trayectoria espiral.

Por último la Tabla 2 muestra los tiempos de corte reales, estimados y teóricos (considerando una velocidad uniforme  $f$  en todo el recorrido) así como una medida del error relativo de los dos últimos. Esta claro que el modelo propuesto tiene una buena correspondencia con los resultados, y aunque el proceso no es a alta velocidad, se ajusta mejor que el tiempo teórico en todos los casos.

## 5. CONCLUSIONES

Se propone un modelo para la estimación del tiempo de corte en operaciones de vaciado planas. La estimación mecánica presentada se basa en la identificación de los procesos de aceleración y deceleración de la fresa mediante una cuantificación de la variación en la dirección de la velocidad por medio de la curvatura de la trayectoria (Sección 2, Ecuaciones 5-6).

Los parámetros del modelo ( $v_c$ ,  $a_n$ , Ecuación, 5) pueden estimarse fácilmente como se indica en la Sección 3, siendo solamente necesario medir la velocidad media en un tramo recto de longitud conocida.

Atendiendo a los ensayos y su discusión, que puede encontrarse en la Sección 4, el modelo se ajusta adecuadamente a las medidas experimentales, y pese a que los ensayos realizados no corresponden a operaciones a alta velocidad, los datos mostrados en la Tabla 2 señalan a un comportamiento más realista que la no consideración de los efectos dinámicos (velocidad uniforme).

En estudios futuros se prevé un análisis más detallado sobre la elección de los parámetros del modelo, unido a un mayor número de ensayos que incluyan vaciados a alta velocidad, junto con la extensión del modelo a curvas 3D.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha llevado a cabo con la financiación del plan propio de la Universidad de Jaén a través del Proyecto de Investigación UJA 2011/13/16.

## 7. REFERENCIAS

- [1] Hatna, R.J. Grieve, P. Broomhead, *Automatic CNC milling of pockets: geometric and technological issues*. Computer Integrated Manufacturing Systems 11 (1998) 4, 309-330.
- [2] M. Hbaieb, R. Othmani, Wassila Bouzid. *Time modeling in high-speed machining of mold pocket*. Int J Adv Manuf Technol (2011) 53:113-120.
- [3] M. Held, Ch. Spielberger. *A smooth spiral tool path for high speed machining of 2D pockets*, Computer-Aided Design, 41 (2009), 539-550.
- [4] Bo H. Kim, B. Young, K. Choi. *Machining Efficiency Comparison Direction-Parallel Tool Path with Contour-Parallel Tool Path*, Computer-Aided Design, 34 (2002), 89-95.
- [5] H. Wang, P. Jang, J.A. Stori. *A metric-based approach to 2D tool-path optimization for high-speed machining*, ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, New Orleans, USA, (2002).
- [6] M. Monreal, C. A. Rodriguez. *Influence of tool path strategy on the cycle time of high-speed milling*. Computer-Aided Design 35 (2003) 395-401.
- [7] M.B. Bieterman, D.R. Sandstrom. *A Curvilinear Tool-Path Method for Pocket Machining*, Journal of manufacturing science and engineering, 125 (2003), 709-715.
- [8] <http://mathworld.wolfram.com/Convex.html>
- [9] N.M. Patrikalakis, T. Maekawa, *Shape interrogation for computer aided design and manufacturing*. Springer, (2002).

- 
- [10] M.P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice hall, (1976).
- [11] G. Farin. *Curves and surfaces for CAGD: a practical guide*. Morgan Kaufmann, (2002).
- [12] J. Sánchez-Reyes, *Periodic Bézier curves*. Computer Aided Geometric Design 26 (2009) 989–1005.